

Image Cover Sheet

CLASSIFICATION

UNCLASSIFIED

SYSTEM NUMBER

507585



TITLE

LE DEVELOPPEMENT D'UNE METHODE D'ESTIMATION BAYESIENNE POUR DES SERIES
D'EVENEMENTS NON STATIONNAIRES

System Number:

Patron Number:

Requester:

Notes:

DSIS Use only:

Deliver to: FF



SANS CLASSIFICATION

DEFENCE RESEARCH ESTABLISHMENT
CENTRE DE RECHERCHES POUR LA DÉFENSE
VALCARTIER

CRDV - R - 9713

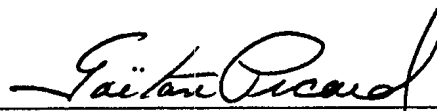
LE DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE D'ESTIMATION BAYÉSIENNE POUR
DES SÉRIES D'ÉVÉNEMENTS NON STATIONNAIRES

par

I. Abi-Zeid

February/février 1998

Approved by/approuvé par



Section Head/Chef de section

24/12/97

Date

UNCLASSIFIED

ABSTRACT

The inhomogeneous Poisson process is often used to model nonstationary series of independent events. The estimation of an intensity function of an inhomogeneous Poisson process is often accomplished using the method of maximum likelihood. However, this parametric approach requires an a priori specification of the form of the intensity function.

The goal of this report is to present a semi-parametric Bayesian method for estimating the intensity function. Under the hypothesis that the dependency structure of the average discretized intensities is circular, the analytical expressions for the estimators and their variances are developed. The performance of this method is analyzed using a simulated process.

RÉSUMÉ

Le processus de Poisson non homogène (PNH) est souvent utilisé pour modéliser les séries non stationnaires d'événements indépendants. L'estimation de la fonction d'intensité d'un PNH se fait souvent par la méthode du maximum de vraisemblance. Cette dernière présente le désavantage d'être une méthode paramétrique, nécessitant ainsi la définition a priori d'une forme paramétrée de la fonction d'intensité.

Le but de ce rapport est de présenter une méthode d'estimation semi-paramétrique bayésienne dont la structure de corrélation est circulaire. Les expressions analytiques des estimateurs ainsi que leurs variances sont développées. La performance de la méthode est étudiée pour un processus simulé.

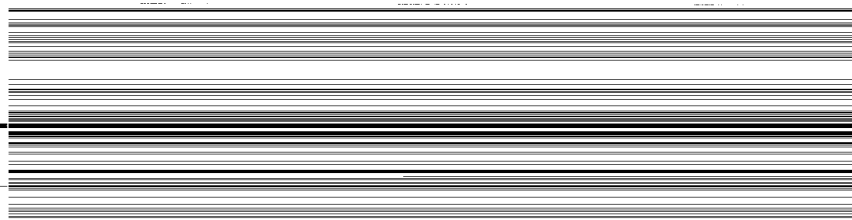




TABLE DES MATIÈRES

1.0 INTRODUCTION1

2.0 LES PROCESSUS PONCTUELS.....3

 2.1 Définitions générales3

 2.2 Le principe de superposition.....8

3.0 L'ESTIMATION BAYÉSIENNE.....10

 3.1 La fonction de vraisemblance10

 3.2 Les hypothèses.....11

 3.3 La méthodologie13

 3.4 L'algorithme d'estimation19

 3.5 Quantification de l'incertitude sur l'intensité estimée par la méthode BSP.....20

4.0 APPLICATIONS ET RÉSULTATS.....22

 4.1 Méthode BSP appliquée à un processus simulé.....22

 4.2 Discussion.....25

5.0 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES FUTURES.....27

6.0 RÉFÉRENCES29

FIGURES 1 à 11

TABLEAU I



FICHE DE SYNTHÈSE

Le processus ponctuel de Poisson non homogène est souvent utilisé pour modéliser une série d'événements non stationnaire. Un événement pourrait être la défaillance d'un équipement, la violation de l'espace aérien canadien, un incident nécessitant des efforts de recherche et sauvetage, etc. Une série d'événements observée est décrite par les temps d'occurrence des événements.

Modéliser une série d'événements par un processus ponctuel correspond à obtenir la loi du nombre d'événements sur un intervalle donné et la loi des intervalles entre deux événements. Ces modèles statistiques sont utiles dans plusieurs cadres tels que la planification stratégique et l'allocation des ressources, les plans de maintenance des équipements, l'analyse du risque, etc. Cette modélisation permet de répondre à des questions du genre: quelle est la probabilité de défaillance d'un équipement donné pendant l'exécution d'une mission? Ou encore, quelle est la probabilité qu'il s'écoule x temps entre deux nouveaux incidents au centre de coordination de recherche et sauvetage (CCRS)?

Une étape très importante de la construction d'un modèle basé sur un processus ponctuel est l'estimation de la fonction d'intensité du processus, et ce à l'aide des données observées (les temps d'occurrence des événements). Nous présentons dans ce travail une méthode d'estimation semi-paramétrique bayésienne dont la structure de corrélation est circulaire. Cette structure de corrélation est particulièrement adaptée aux événements dont le taux d'occurrence dépend du temps d'une façon saisonnière, comme les incidents maritimes traités dans un CCRS qui sont plus nombreux l'été que l'hiver. Nous développons ensuite les expressions analytiques des estimateurs ainsi que leurs variances. De plus, nous étudions la performance de la méthode bayésienne pour un processus de Poisson non homogène simulé.



1.0 INTRODUCTION

La modélisation statistique d'une série d'événements par un processus ponctuel permet de connaître les propriétés statistiques des occurrences de l'événement en question. Un événement pourrait être la défaillance d'un équipement, la violation de l'espace aérien canadien, un écrasement d'avion, un incident nécessitant des efforts de recherche et sauvetage, etc.

Une série d'événements observée est décrite par les temps d'occurrence des événements. Modéliser une série d'événements par un processus ponctuel correspond à obtenir la loi du nombre d'événements sur un intervalle donné et la loi des intervalles entre deux événements. Ces modèles statistiques sont utiles dans plusieurs cadres tels que la planification stratégique et l'allocation des ressources, les plans de maintenance des équipements, l'analyse du risque, etc. Cette modélisation permet de répondre à des questions du genre: quelle est la probabilité de défaillance d'un équipement donné pendant l'exécution d'une mission? Ou encore, quelle est la probabilité qu'il s'écoule x temps entre deux nouveaux incidents au centre de coordination de recherche et sauvetage (CCRS)?

Le processus ponctuel de Poisson non homogène (PNH) est souvent utilisé pour la modélisation de séries d'événements indépendants. Une partie très importante de la construction d'un modèle basé sur un processus ponctuel est l'estimation de la fonction d'intensité du processus, et ce à l'aide des données observées (les temps d'occurrence des événements).

L'estimation de la fonction d'intensité d'un PNH se fait habituellement par la méthode du maximum de vraisemblance (MV) (réf. 1 à 3). Toutefois, cette méthode d'estimation présente l'inconvénient que la forme de la fonction d'intensité doit être

connue. Les auteurs supposent alors que la fonction d'intensité a la forme périodique suivante:

$$\lambda(t) = \beta_0 \exp \left[\sum_{j=1}^q \beta_j \sin(j\omega t + \beta_{q+j}) \right], \quad \omega = \frac{2\pi}{365} \quad (1)$$

Or, cette forme analytique n'est pas toujours réaliste. Une option de rechange consiste à estimer cette fonction selon une approche bayésienne semi-paramétrique (BSP). Dans ce travail, nous présentons cette méthode et nous développons certains résultats analytiques que nous avons obtenus lorsque la structure de dépendance des intensités moyennes est supposée circulaire. Cette structure de dépendance est particulièrement bien adaptée aux événements dont le taux d'occurrence dépend du temps d'une façon saisonnière, comme les incidents maritimes traités dans un CCRS qui sont plus nombreux l'été que l'hiver.

Nous commençons par présenter au chapitre 2 certaines notions reliées aux processus ponctuels nécessaires pour la compréhension de ce texte. Le chapitre 3 présente les développements reliés à la méthode BSP. Nous comparons ensuite au chapitre 4 les résultats d'estimation obtenus par la méthode BSP sur un PNH simulé avant de conclure au chapitre 5.

Cette recherche a été effectuée au CRDV dans le cadre de l'unité de travail 3aa11, "Advanced Decision Aids Technologies", entre mars 1997 et juillet 1997.

2.0 LES PROCESSUS PONCTUELS

Nous présentons dans ce chapitre quelques notions de base reliées aux processus stochastiques ponctuels. Les références principales utilisées dans ce chapitre sont (réf. 4 à 6). Nous commençons par définir à la section 2.1 les processus stochastiques, les processus ponctuels et la fonction d'intensité, le processus de Poisson homogène et de Poisson non homogène. Nous expliquons ensuite à la section 2.2 le principe de superposition qui est à la base de la méthode d'estimation développée.

2.1 Définitions générales

Un processus stochastique est une collection de variables aléatoires $\{Z_t\}$, où le paramètre t est défini sur un espace paramétrique T . Le paramètre t représente généralement le temps¹; il est défini sur l'échelle des réels non négatifs. Un processus ponctuel PP est un processus stochastique dont la réalisation est une collection de points, chaque événement (point) e_j ayant une position t_j bien définie dans le temps, tel qu'illustré à la figure 1. On dénote par H_t l'historique du processus au temps t , c'est-à-dire les positions de tous les points dans l'intervalle $(0,t]$. Nous utiliserons la notation A pour désigner un intervalle $(t',t'']$.

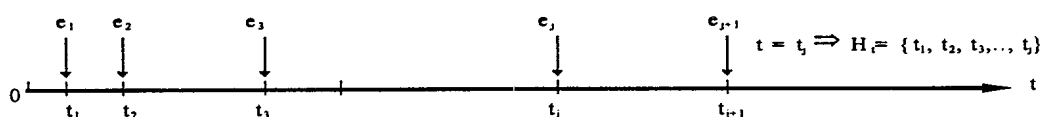


FIGURE 1 - La réalisation d'un processus stochastique ponctuel

¹ Pour les fins de cette étude, le paramètre t représentera le temps.

SANS CLASSIFICATION

Soient T_1, T_2, \dots, T_j , les variables aléatoires correspondant aux temps d'occurrence d'un événement. Les intervalles entre les événements sont dénotés par X_1, X_2, \dots, X_j où $X_j = T_j - T_{j-1}, j > 1$. L'intervalle entre l'origine et le premier événement est X_1 (fig. 2).



FIGURE 2 - La définition des intervalles dans un processus stochastique ponctuel

N est une mesure de dénombrement aléatoire et N_t est un entier non négatif représentant le nombre d'événements dans l'intervalle $(0, t]$, tel qu'illustré à la figure 3. $N(A)$ est le nombre d'événements dans l'intervalle A . Si $A = \bigcup_r A_r$, et si les intervalles A_r sont disjoints, alors $N(A) = \sum_r N(A_r)$.

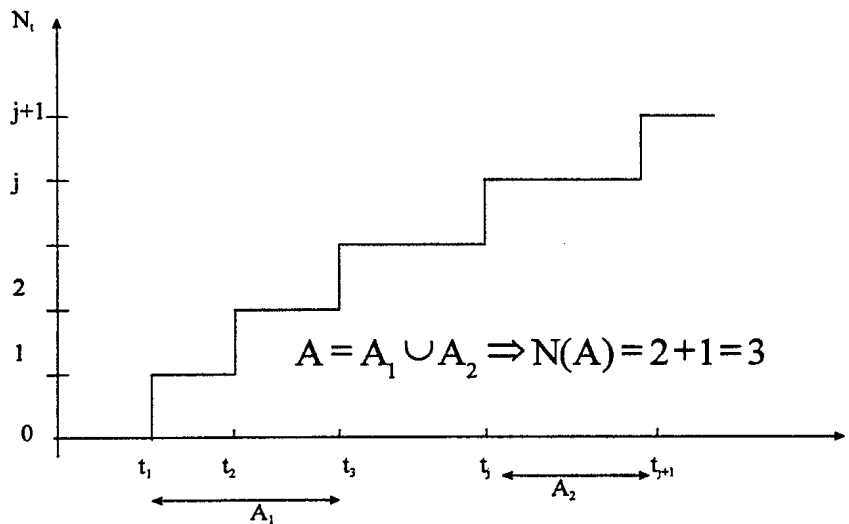


FIGURE 3 - Le nombre d'événements dans une union d'intervalles

Le lien entre le nombre d'événements et les intervalles s'exprime par la relation suivante:

$$P(N_s > r) = P(X_{r+1} \leq s) \quad (2)$$

Ainsi, nous retrouvons plus de r événements dans l'intervalle (0,s] si et seulement si le (r+1)^{ème} événement a lieu au plus tard au temps s (fig. 4):

$$N_s < r \Leftrightarrow X_1 + X_2 + \dots + X_r > s \quad (3)$$

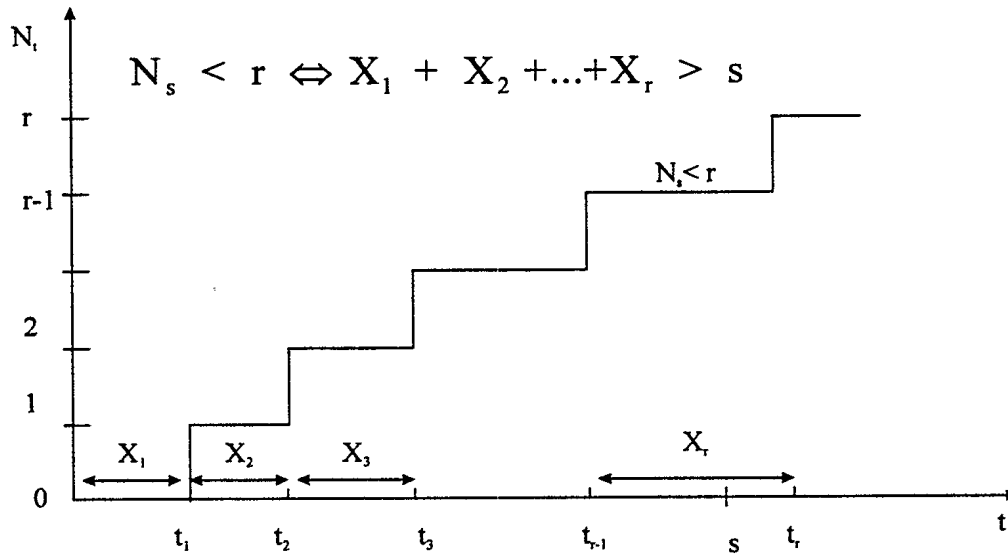


FIGURE 4 - Le lien entre le nombre d'événements et les intervalles

Un processus ponctuel, défini sur l'ensemble des réels R^+ non négatifs et ne permettant pas l'occurrence d'événements multiples simultanés, peut être spécifié mathématiquement de trois façons:

- en fonction de la distribution conjointe du nombre des points $N(A)$ sur un intervalle A ;

- en fonction de la distribution conjointe des intervalles $\{X_j\}$ entre les points successifs; ou
- par l'intermédiaire d'une fonction d'intensité, $\rho(t;H_t)$.

La frontière entre les processus stochastiques ponctuels et d'autres types de processus stochastiques, tels que le processus de Markov, n'est pas bien délimitée. Tout processus stochastique ayant un nombre fini d'états peut être associé à un processus ponctuel, où un événement de type i peut correspondre à l'entrée dans l'état i par exemple.

2.1.1 La fonction d'intensité

La fonction d'intensité $\rho(t;H_t)$ est définie par:

$$\rho(t;H_t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(N_{t+\Delta t} = 1 | H_t)}{\Delta t} \quad (4)$$

Cette quantité correspond au taux moyen instantané d'occurrence d'un événement. Autrement dit, $\rho(t;H_t)\Delta t$ est la probabilité instantanée d'un événement dans l'intervalle $(t, t+\Delta t)$.

Un processus ponctuel PP est spécifié selon deux approches: soit à l'aide du nombre de points N_t dans un intervalle de temps $(0, t]$, soit à l'aide des intervalles X_j entre les points. Pour un type de processus donné, une approche est habituellement plus simple que l'autre. Nous présentons ci-dessous le processus de Poisson homogène (PH), et le processus de Poisson non homogène (PNH).

2.1.2 Le processus de Poisson homogène

Le processus de Poisson homogène (PH) est un choix classique en raison de sa simplicité. Il est caractérisé par une fonction d'intensité constante $\rho(t;H_t)=\rho$ et par les hypothèses de stationnarité, de non-multiplicité, et d'indépendance suivantes:

- la stationnarité implique que la probabilité d'occurrence d'un événement est proportionnelle à la longueur d'un petit intervalle et indépendante du temps d'occurrence de l'événement lui-même;
- la non-multiplicité implique que la probabilité de deux ou plusieurs événements dans un petit intervalle $(t,t+\Delta t]$ est négligeable;
- l'indépendance implique que le nombre d'événements dans un intervalle donné est indépendant du nombre d'événements dans d'autres intervalles disjoints. Ainsi, les probabilités ne dépendent pas de H_t , c'est-à-dire que la probabilité de trouver un point dans l'intervalle $(t,t+\Delta t]$ ne dépend pas du nombre de points avant t ni du fait qu'il y ait eu ou non un point à t .

Un processus ponctuel PP est un processus de Poisson homogène de taux ρ constant si les conditions suivantes sont vérifiées, $\forall t, \Delta t \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} P\{N_{t+\Delta t} - N_t = 1 | H_t\} &= \rho \Delta t + o(\Delta t) \\ P\{N_{t+\Delta t} - N_t > 1 | H_t\} &= o(\Delta t) \\ \text{donc } P\{N_{t+\Delta t} - N_t = 0 | H_t\} &= 1 - \rho \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (5)$$

Le nombre de points dans un intervalle de longueur t est distribué selon une loi de Poisson de moyenne ρt . Les intervalles X_1, X_2, \dots, X_i entre les points successifs sont indépendants et distribués selon une loi exponentielle à paramètre ρ : $f_X(x) = \rho e^{-\rho x}$. La variable $T_j = X_1 + X_2 + \dots + X_j$ suit une loi Erlang dont la densité est:

$$g(t) = \frac{\rho(\rho t)^{-1} e^{-\rho t}}{(j-1)!} \quad (6)$$

2.1.3 Le processus de Poisson non homogène

Le processus de Poisson non homogène (PNH) est une extension du processus de Poisson homogène, où la fonction d'intensité $\rho(t)$ dépend du temps. Les hypothèses d'indépendance et de non-multiplicité des événements sont maintenues, tandis que l'hypothèse de stationnarité ne l'est plus. Le nombre d'événements N_t est distribué selon une loi de Poisson de paramètre $\int_0^t \rho(u) du$. Les intervalles X_j entre les points du PNH ne sont plus indépendants; l'indépendance est plutôt conditionnelle à t_j .

2.2 Le principe de superposition

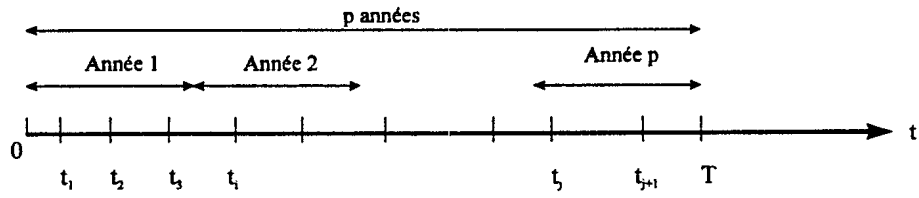
L'estimation bayésienne de l'intensité d'un PNH est basée sur la construction d'un processus superposé: étant donné un processus de base PB observé pendant p périodes τ (années), le processus superposé PS est obtenu en ramenant les p flux de durées τ (1 an) sur un même intervalle de temps de durée τ . La figure 5 illustre le concept d'un processus superposé.

Si le processus de base PB est poissonien d'intensité $\lambda(t)$, périodique de période τ , alors le processus superposé PS sera poissonien d'intensité $p\lambda(t)$. Sinon, pour $p \rightarrow \infty$, le processus PS résultant de la superposition sera quand même poissonien (réf. 7 et 8).

SANS CLASSIFICATION

9

Le processus de base (PB) observé sur $(0, T = p\tau)$, $\tau = 1$ année, d'intensité $\lambda(t)$



Le processus superposé (PS) sur $(0, TS = \tau)$, $\tau = 1$ année, d'intensité $p\lambda(t)$

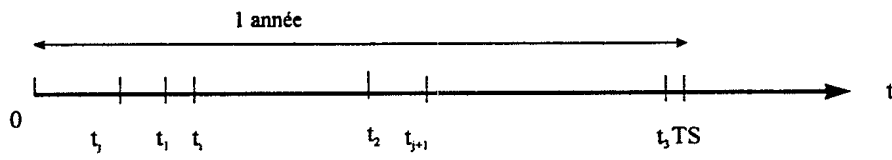


FIGURE 5 - La superposition de processus

3.0 L'ESTIMATION BAYÉSIENNE

Le principe fondamental de la statistique bayésienne est formulé comme suit (réf. 9):

Toutes les données nécessaires pour porter un jugement opérationnel sur un paramètre θ sont contenues dans $\beta_y(\theta)$, la densité de probabilité a posteriori de θ :

$$\beta_y(\theta) = \frac{f(y|\theta)b(\theta)}{\int_{\Theta} f(y|\theta)b(\theta)d\theta} \quad (7)$$

où $b(\theta)$ est la densité a priori de θ . Cette densité a priori est estimée préalablement à et indépendamment de la prise en compte des observations y .

La fonction $f(y|\theta)$ est la densité conditionnelle des observations. Elle est identique à la vraisemblance de l'échantillon $L(n,\theta)$.

3.1 La fonction de vraisemblance

Nous commençons par présenter la fonction de vraisemblance de l'échantillon, $L(n,\Lambda)$. Considérons l'intervalle $[0,\tau]_K$ séparé en K intervalles disjoints de longueur Δ_i tels que $\sum_i \Delta_i = \tau$. Soit $\bar{\lambda}_i = \frac{1}{\Delta_i} \int_{\Delta_i} \lambda(u)du$, l'intensité moyenne sur Δ_i , où $\lambda(u)$ est l'intensité du processus de base PB.

Soit n_i le nombre d'événements superposés sur Δ_i . Chaque n_i suit indépendamment des autres n_j une loi de Poisson de paramètre $p\bar{\lambda}_i$ telle que la vraisemblance conjointe pour les K intervalles s'écrit:

$$L(n, \Lambda) = \exp\left(-\sum_1^K p\bar{\lambda}_i\right) \prod_{i=1}^K \frac{(p\bar{\lambda}_i)^{n_i}}{n_i!}, \quad \Lambda = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_K) \quad (8)$$

Posons $\theta_i = \text{Log}(p\bar{\lambda}_i)$, c une constante ne dépendant pas des θ_i . Nous avons alors:

$$L(n, \Theta) = c \exp\left(-\sum_1^K \exp(\theta_i) + \sum_1^K n_i \theta_i\right) \quad (9)$$

L'estimation de $\lambda(u)$ revient à estimer $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$. Dans ce travail, nous développons la méthode d'estimation pour une matrice de covariance V circulaire (définie dans l'hypothèse 2), et nous appliquons cette approche à l'estimation de l'intensité dans les deux cas: la moyenne de Θ , $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K)$, connue et $\bar{\mu}$ inconnue. Les hypothèses que nous posons sont développées à la section 3.1.

3.2 Les hypothèses

L'estimation de $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$ se fera selon l'approche bayésienne décrite dans (réf. 8) basée sur les travaux de Leonard (réf. 10, et 11) qui propose d'estimer les θ_i par les valeurs modales de la distribution a posteriori $\beta_n(\Theta)$. Les θ_i sont alors la solution du système $\frac{\partial \beta_n(\Theta)}{\partial \theta_i} = 0, i = 1..K$.

3.2.1 Hypothèse 1: normalité de la densité a priori des paramètres θ_i

Nous supposons que $b(\Theta)$ suit une loi $N(\bar{\mu}, V)$, où $C=V^{-1}$ est l'inverse de la matrice de variance-covariance des θ_i . La loi $b(\Theta)$ est donnée par:

$$b(\Theta) = r \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\Theta - \bar{\mu})^T C(\Theta - \bar{\mu})\right)}{\sqrt{\det(V)}} \quad (10)$$

où r est une constante. Une conséquence de cette hypothèse est que la densité a posteriori $\beta_n(\Theta)$ est:

$$\beta_n(\Theta) = s \exp\left(-\sum_1^K \exp(\theta_i) + \sum_1^K n_i \theta_i\right) * b(\Theta) \quad (11)$$

où la constante s est choisie telle que $\int_{\Theta} \beta_n(\Theta) d\Theta = 1$.

3.2.2 Hypothèse 2: modèle de dépendance circulaire

Afin d'estimer les valeurs de θ_i , la matrice V doit être spécifiée pour tenir compte de la structure de dépendance des θ_i . Pour l'application aux processus périodiques tels que l'occurrence d'incidents qui doivent être traités par un centre de coordination de recherche et sauvetage, une hypothèse naturelle est de choisir la distribution des θ_i circulaire, c'est-à-dire, qu'il existe une dépendance directe entre θ_K et θ_1 en plus de la corrélation d'ordre 1 entre θ_i et θ_{i+1} , $i=1, K-1$.

Posons $\varphi_i = \theta_i - \mu_i$. Un modèle compatible avec l'hypothèse de dépendance circulaire est:

$$\varphi_i = a(\varphi_{i-1} + \varphi_{i+1}) + \varepsilon_i \quad (12)$$

où les K variables ε_i sont des variables aléatoires indépendantes normales d'espérance nulle et de variance σ^2 constante. Posons $h=1/\sigma^2$, $\Phi=[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_K]$, $E=[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_K]$. Il faut alors estimer a et h afin de connaître θ_i .

Notre approche diffère de celle de Vernos (réf. 12) qui a supposé que V possédait la propriété suivante: $v_{ij} = v^2 \rho^{|j-i|}$, $-1 < \rho < 1$.

3.2.3 Hypothèse 3: $\bar{\mu}$ est connue

On suppose que la moyenne a priori de Θ , $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ est connue.

3.2.4 Hypothèse 3': $\bar{\mu}$ est inconnue

On suppose que la moyenne a priori de Θ , $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ est inconnue et que $\mu_i = \mu_0$, où la loi a priori de μ_0 est $N(m, v^2)$. Les hypothèses 3 et 3' sont mutuellement exclusives.

3.2.5 Hypothèse 4: indépendance de a et de h et leurs densités

On suppose que a et h sont indépendants et que leurs densités a priori sont non informatives, c'est-à-dire qu'elles ne contiennent pas d'information sur a et h , telles que $b(a|h)=1$ et $b(h)=1/h$. Notons que ces lois sont impropres.

3.3 La méthodologie

La méthodologie d'estimation suivie s'appuie sur les étapes de calcul suivantes:

1. spécifier la matrice de variance-covariance V , et sa matrice inverse C ;
2. estimer a , h , et Θ lorsque $\bar{\mu}$ est connue; ou
- 2'. estimer a , h , et Θ lorsque $\bar{\mu}$ est inconnue.

Ces étapes sont décrites dans les paragraphes qui suivent.

3.3.1 Étape 1: matrice de variance-covariance V

Il s'agit en premier lieu de spécifier V, la matrice de variance-covariance du système $\varphi_i = a(\varphi_{i-1} + \varphi_{i+1}) + \varepsilon_i$, ainsi que son déterminant et sa matrice inverse C. Le système d'équations (12) implique que:

$$\text{Var}(\varphi_i) = V_0, \text{ et que } \text{Cov}(\varphi_i, \varphi_{i+j \bmod K}) = V_j, \forall i, \forall j, i, j = 1..K. \quad (13)$$

L'annexe A présente les calculs menant à la matrice V et à $C = h^* A^2$ où:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2a^2 + 1 & -2a & a^2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & a^2 & -2a \\ -2a & 2a^2 + 1 & -2a & a^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a^2 \\ a^2 & -2a & 2a^2 + 1 & -2a & a^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a^2 & -2a & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & a^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -2a & a^2 \\ a^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a^2 & -2a & 2a^2 + 1 & -2a \\ -2a & a^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a^2 & -2a & 2a^2 + 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Le déterminant de la matrice V est (annexe A):

$$\det(V) = \frac{1}{\det(C)} = \frac{1}{h^K (\det A)^2} \quad (15)$$

$$\det(A) = \left\{ -2a^K + \prod_{m=1}^{K-1} \left(1 + 2a \cos\left(\frac{m\pi}{K}\right) \right) - 2a^2 \prod_{m=1}^{K-2} \left(1 + 2a \cos\left(\frac{m\pi}{K-1}\right) \right) \right\} \quad (16)$$

3.3.2 Étape 2: estimation de a, h, et Θ lorsque $\bar{\mu}$ est connue

Nous développons dans cette section les estimateurs de a, h, et Θ lorsque $\bar{\mu}$ est connue.

Suite aux hypothèses 1, 2, 3 et 4, la densité conjointe a priori $b_n(a, h, \Theta)$ de a, h , et Θ lorsque $\bar{\mu}$ connue est:

$$b_n(a, h, \Theta) \propto b(\Theta | a, h) * b(a|h) * b(h) \quad (17)$$

et la densité a posteriori correspondante $\beta_n(a, h, \Theta)$ est:

$$\beta_n(a, h, \Theta) \propto b(\Theta | a, h) * b(a|h) * b(h) * L(n, \Theta) \quad (18)$$

où $b(\Theta | a, h)$ est la loi normale multivariée de moyenne $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ connue et de matrice de variance-covariance V . Ceci implique que $b(\Phi | a, h)$ suit une loi $N(0, V)$, où Q est une constante et $C=V^{-1}$ telle que:

$$b(\Phi | a, h) = Q \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \Phi^T C \Phi\right)}{\sqrt{\det(V)}} \quad (19)$$

et que la densité a posteriori de Φ est:

$$\beta_n(a, h, \Phi) \propto b(\Phi, | a, h) \frac{1}{h} \exp\left(-\sum_{i=1}^K \exp(\varphi_i + \mu_i) + \sum_{i=1}^K n_i (\varphi_i + \mu_i)\right) \quad (20)$$

Afin d'estimer θ_i par la solution de $\frac{\partial \beta_n(a, h, \Theta)}{\partial \theta_i} = 0$, a par la solution de $\frac{\partial \beta_n(a, h, \Phi)}{\partial a} = 0$, et h par la solution de $\frac{\partial \beta_n(a, h, \Phi)}{\partial h} = 0$, nous utilisons le résultat suivant (réf. 12).

La coordonnée en θ_1 du mode conjoint de (θ_1, θ_2) est égale à la valeur du mode de la distribution conditionnelle de θ_1 pour θ_2 fixé égal à la valeur en θ_2 du mode conjoint.

3.3.2.1 Étape 2.1: estimation de Θ

Les estimateurs $\hat{\theta}_i$ sont les solutions du système $\frac{\partial \beta_n(\hat{a}, \hat{h}, \Theta)}{\partial \theta_i} = 0$, pour a et h fixés, ce qui correspond au système:

$$e^{\hat{\theta}_i} = n_i \sum_{j=1}^K \hat{C}_{ij}(\hat{\theta}_j - \mu_j) \quad (21)$$

Une approximation linéaire de la solution itérative de (21) à l'étape r est:

$$e^{\hat{\theta}_i^{r+1}} = e^{\hat{\theta}_i^r} \left[1 + [\hat{\theta}_i^{r+1} - \hat{\theta}_i^r] \right] \quad (22)$$

ce qui donne en reportant (21) dans (22):

$$\left(e^{\hat{\theta}_i^r} + \hat{C}_{ii}^r \right) \hat{\theta}_i^{r+1} + \sum_{j \neq i} \hat{C}_{ij}^r \hat{\theta}_j^{r+1} = e^{\hat{\theta}_i^r} (\hat{\theta}_j^r - 1) + n_i + \sum_{j=1}^K \hat{C}_{ij}^r \mu_j \quad (23)$$

Le système d'équations (23) doit alors être résolu itérativement afin d'obtenir $\hat{\theta}_i$.

3.3.2.2 Étape 2.2: estimation de a et de h

Posons $W = \det(A)$, nous avons alors $\det(V) = h^{-K} W^{-2}$, et:

$$\beta_n(a, h, \Phi) \propto \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \Phi^T C \Phi\right)}{h \sqrt{\det(V)}} \Rightarrow \beta_n(a, h, \Phi) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \Phi^T C \Phi\right) h^{\frac{K}{2}-1} W \quad (24)$$

où φ_j correspond à $\varphi_{j \bmod K}$ et:

$$\Phi^T C \Phi = h \left[\left((2a^2 + 1) \sum_{j=1}^K \varphi_j^2 \right) - 4a \sum_{j=1}^K \varphi_j \varphi_{j+1} + 2a^2 \sum_{j=1}^K \varphi_j \varphi_{j+2} \right] \quad (25)$$

Posons $P = (\Phi^T C \Phi)/h$, nous avons alors:

$$\beta_n(a, h, \Phi) \propto \exp\left(-\frac{hP}{2}\right) h^{\frac{K}{2}-1} W \quad (26)$$

L'estimation de h pour a et Φ fixés est obtenue par:

$$\frac{\partial \beta_n(\hat{a}, h, \hat{\Phi})}{\partial h} = \frac{K-2}{2} \left(h^{\frac{K-4}{2}} \exp\left(-\frac{h\hat{P}}{2}\right) \hat{W} \right) - \frac{1}{2} \left(h^{\frac{K-2}{2}} \exp\left(-\frac{h\hat{P}}{2}\right) \hat{W}\hat{P} \right) \quad (27)$$

$$\text{où } \hat{P} = \left[\left((2\hat{a}^2 + 1) \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j^2 \right) - 4\hat{a} \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j \hat{\phi}_{j+1} + 2\hat{a}^2 \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j \hat{\phi}_{j+2} \right]$$

$$\text{et } \hat{W} = \left\{ -2\hat{a}^k + \prod_{m=1}^{K-1} \left(1 + 2\hat{a} \cos\left(\frac{m\pi}{K}\right) \right) - 2\hat{a}^2 \prod_{m=1}^{K-2} \left(1 + 2\hat{a} \cos\left(\frac{m\pi}{K-1}\right) \right) \right\}$$

$$\frac{\partial \beta_n(\hat{a}, h, \hat{\Phi})}{\partial h} = 0, \text{ et } \hat{W} \neq 0, h \neq 0 \text{ impliquent que:}$$

$$\hat{h} = \frac{K-2}{\left[\left((2\hat{a}^2 + 1) \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j^2 \right) - 4\hat{a} \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j \hat{\phi}_{j+1} + 2\hat{a}^2 \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j \hat{\phi}_{j+2} \right]} \quad (28)$$

L'estimation de a pour h et Φ fixés est donnée par:

$$\frac{\partial \beta_n(a, \hat{h}, \hat{\Phi})}{\partial a} = \left[\frac{\partial P}{\partial a} \left(-\frac{\hat{h}^{\frac{K}{2}}}{2} \exp\left(-\frac{h\hat{P}}{2}\right) W \right) \right] + \left(\hat{h}^{\frac{K-2}{2}} \exp\left(-\frac{h\hat{P}}{2}\right) \frac{\partial W}{\partial a} \right) \quad (29)$$

$$\text{où } \frac{\partial P}{\partial a} = \left[\left(4a \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j^2 \right) - 4 \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j \hat{\phi}_{j+1} + 4a \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j \hat{\phi}_{j+2} \right]$$

$$\frac{\partial \beta_n(a, \hat{h}, \hat{\Phi})}{\partial a} = 0, \text{ et } W \neq 0, \hat{h} \neq 0 \text{ impliquent que:}$$

$$-\frac{\hat{h}}{2} \left[4a \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j^2 - 4 \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j \hat{\phi}_{j+1} + 4a \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j \hat{\phi}_{j+2} \right] + \frac{\partial W}{\partial a} = 0 \quad (30)$$

Cette dernière équation doit être résolue pour a.

3.3.2.3 Étape 2.2': estimation de a, h, et Θ lorsque $\bar{\mu}$ est inconnue

Lorsqu'on suppose $\bar{\mu}$ inconnue, la densité conjointe a priori est:

$$b_n(a, h, \Theta, \mu_0) \propto b(\Theta | a, h, \mu_0) * b(a|h, \mu_0) * b(h| \mu_0) * b(\mu_0) \quad (31)$$

et la densité a posteriori correspondante $\beta_n(a, h, \Theta, \mu_0)$ est:

$$\beta_n(a, h, \Theta, \mu_0) \propto b(\Theta | a, h, \mu_0) * b(a|h, \mu_0) * b(h| \mu_0) * b(\mu_0) \quad (32)$$

Les valeurs modales $\hat{\theta}_i$ pour a, h, et μ_0 fixés, sont les solutions du système

$$\frac{\partial \beta_n(\hat{a}, \hat{h}, \hat{\mu}_0, \Theta)}{\partial \theta_i} = 0, \text{ ce qui correspond à l'équation 22.}$$

L'estimateur de μ_0 tel que donné par la solution modale de $\frac{\partial \beta_n(\hat{a}, \hat{h}, \hat{\Theta}, \mu_0)}{\partial \mu_0} = 0,$

$v^2 \rightarrow \infty$ est à l'étape r:

$$\hat{\mu}_0^{r+1} = \frac{\sum_{i=1}^K \hat{C}_i^r \hat{\theta}_i^{r+1}}{\hat{C}_-^r}, \text{ où } C_i = \sum_{j=1}^K C_{ij}, C_j = \sum_{i=1}^K C_{ij}, C_- = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^K C_{ij} \quad (33)$$

En reportant l'équation 34 dans l'équation 23, on obtient pour a, h et μ_0 fixés:

$$\left[e^{\hat{\theta}_i^r} + \frac{\hat{C}_{ii}^r \hat{C}_{ii}^r - \hat{C}_{i.}^r{}^2}{\hat{C}_{.}^r} \right] \hat{\theta}_i^{r+1} + \sum_{j \neq i} \frac{\hat{C}_{ij}^r \hat{C}_{ij}^r - \hat{C}_{.j}^r{}^2}{\hat{C}_{.}^r} \hat{\theta}_j^{r+1} = e^{\hat{\theta}_i^r} (\hat{\theta}_i^r - 1) + n_i \quad (34)$$

Les estimateurs de h et de a sont donnés par les équations 28 et 30.

3.4 L'algorithme d'estimation

L'algorithme d'estimation selon la méthode BSP présenté à la figure 6 se rapporte aux étapes 2 et 2':

1. Initialiser Θ (et μ_0 pour le cas où μ est inconnue)
2. À l'étape r:
 - a. calculer $\hat{\phi}_i^r = \hat{\theta}_i^r - \hat{\mu}_0^r$
 - b. Résoudre l'équation (30) suivante pour obtenir \hat{a}^r :

$$-\frac{\hat{h}}{2} \left(4a \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j^2 - 4 \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j \hat{\phi}_{j+1} + 4a \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j \hat{\phi}_{j+2} \right) + \frac{\partial W}{\partial a} = 0,$$
 où $W = \frac{1}{\sqrt{h^K \det C}}$
 - c. Obtenir \hat{h}^r par l'équation (28) suivante:

$$\hat{h}^r = \frac{K-2}{(2\hat{a}^2 + 1) \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j^2 - 4\hat{a} \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j \hat{\phi}_{j+1} + 2\hat{a}^2 \sum_{j=1}^K \hat{\phi}_j \hat{\phi}_{j+2}}$$
 - d. Calculer $\hat{C}^r = \hat{h} \hat{A}^2$
 - e. Si μ est connue, résoudre le système d'équation (23) suivant:

$$\left(e^{\hat{\theta}_i^r} + \hat{C}_{ii}^r \right) \hat{\theta}_i^{r+1} + \sum_{j \neq i} \hat{C}_{ij}^r \hat{\theta}_j^{r+1} = e^{\hat{\theta}_i^r} (\hat{\theta}_i^r - 1) + n_i + \sum_{j=1}^K \hat{C}_{ij}^r \mu_j$$
 - e'. Si μ est inconnue, résoudre le système d'équation (34) suivant:

$$\left(e^{\hat{\theta}_i^r} + \frac{\hat{C}_{ii}^r \hat{C}_{ii}^r - \hat{C}_{i.}^r{}^2}{\hat{C}_{.}^r} \right) \hat{\theta}_i^{r+1} + \sum_{j \neq i} \frac{\hat{C}_{ij}^r \hat{C}_{ij}^r - \hat{C}_{.j}^r{}^2}{\hat{C}_{.}^r} \hat{\theta}_j^{r+1} = e^{\hat{\theta}_i^r} (\hat{\theta}_i^r - 1) + n_i$$
 et calculer $\hat{\mu}_0^{r+1}$ par l'équation (33) suivante:

$$\hat{\mu}_0^{r+1} = \frac{\sum_{i=1}^K \hat{C}_{i.}^r \hat{\theta}_i^{r+1}}{\hat{C}_{.}^r}, \text{ où } C_{i.} = \sum_{j=1}^K C_{ij}, C_{.j} = \sum_{i=1}^K C_{ij}, C_{.} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K C_{ij}$$
3. Répéter 1 et 2 jusqu'à ce que l'estimation soit jugée satisfaisante.

FIGURE 6 - L'algorithme d'estimation BSP de la fonction d'intensité d'un PNH

3.5 Quantification de l'incertitude sur l'intensité estimée par la méthode BSP

Nous présentons dans ce qui suit les variances des paramètres estimés $\hat{\theta}_i$ par la méthode BSP.

3.5.1 Variance de $\hat{\theta}_i$

Sous certaines conditions de dérivabilité de $b(\Theta)$ et de $L(n, \Theta)$ (fonctions positives et deux fois dérivables) (réf. 13), la loi a posteriori β_n de Θ est approximativement $N(\hat{\Theta}, [\hat{I}(n)]^{-1})$, où les éléments (i, j) de $\hat{I}(n)$, la matrice d'information de Fisher, sont définis par:

$$\hat{I}_{ij}(n) = \left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log(L(n, \Theta)) \right]_{\Theta = \hat{\Theta}} \quad (35)$$

Nous avons donc:

$$\hat{I}_{ii}(n) = \exp(-\hat{\theta}_i), \quad \hat{I}_{ij}(n) = 0, \quad i \neq j, \quad \text{et} \quad \text{Var}(\hat{\theta}_i) = \exp(-\hat{\theta}_i) \quad (36)$$

3.5.2 Variance de $\hat{\lambda}_i$

La matrice d'information de Fisher de $\hat{\lambda}_i$, $I^*(\hat{\lambda}_i)$, est obtenue à partir de celle de $\hat{\theta}_i$. Puisque $\hat{\theta}_i = h(\hat{\lambda}_i) = \log(p \hat{\lambda}_i)$, nous avons (réf. 14):

$$I^*(\hat{\lambda}_i) = I(h(\hat{\lambda}_i))(h'(\hat{\lambda}_i))^2 \quad (37)$$

$$\Rightarrow I^*(\hat{\lambda}_i) = \exp(\log(p \hat{\lambda}_i)) \left(\frac{p}{p \hat{\lambda}_i} \right)^2 \quad (38)$$

SANS CLASSIFICATION

21

$$\Rightarrow I^*(\hat{\lambda}_i) = \exp(\hat{\theta}_i) \left(\frac{p}{p \frac{\exp(\hat{\theta}_i)}{p}} \right)^2 \quad (39)$$

$$\Rightarrow I^*(\hat{\lambda}_i) = \frac{p^2}{\exp(\hat{\theta}_i)} \quad (40)$$

$$\Rightarrow \text{var}(\hat{\lambda}_i) = I^{*-1}(\hat{\lambda}_i) = \frac{\exp(\hat{\theta}_i)}{p^2} = \frac{\hat{\lambda}_i}{p} \quad (41)$$

4.0 APPLICATIONS ET RÉSULTATS

Nous présentons à la section 4.1 les résultats de la méthode d'estimation bayésienne semi-paramétrique (BSP) sur un processus de Poisson non homogène (PNH) généré par simulation selon l'algorithme de Ross (réf. 15) décrit à l'annexe B. Nous avons procédé selon les deux hypothèses 3 et 3', c'est-à-dire pour les cas où $\bar{\mu}$ est connue et $\bar{\mu}$ est inconnue. La comparaison sur un processus simulé fournit une évaluation plus juste des méthodes, car les données simulées proviennent exactement par définition d'un PNH, ce qui n'est pas nécessairement le cas des données observées pour lesquelles le PNH est au mieux un modèle approximatif.

4.1 Méthode BSP appliquée à un processus simulé

La fonction d'intensité du PNH utilisée pour l'étude est la suivante (fig. 7):

$$\lambda(t) = .01 \exp[2 \sin(\omega t + 1)], \quad \omega = \frac{2\pi}{365} \quad (42)$$

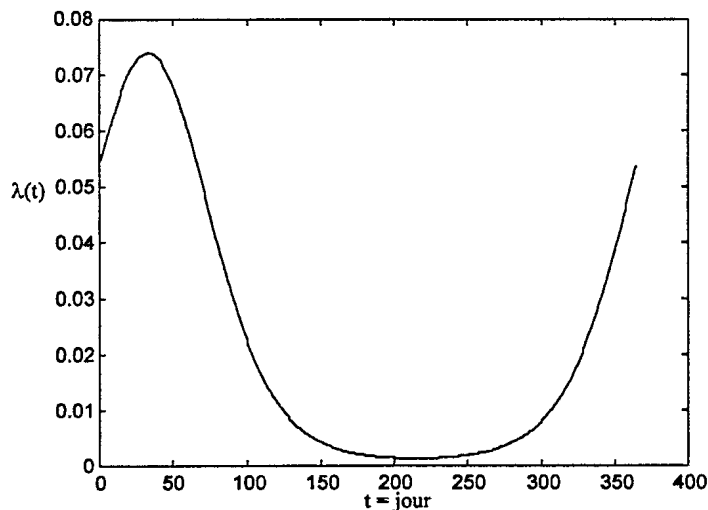


FIGURE 7 - La fonction d'intensité réelle

Nous avons généré deux PNH à l'aide de la fonction $\lambda(t)$ de l'équation 42. Le premier, généré sur un horizon de 15 ans, contient 130 événements simulés, et le deuxième généré sur une période de 55 ans contient 460 événements simulés. Les algorithmes de génération et d'estimation pour $\bar{\mu}$ connue et $\bar{\mu}$ inconnue sont programmés en MAPLE.

4.1.1 Cas où $\bar{\mu}$ est connue

Dans ce cas, tous les θ_i sont initialisés à la même valeur correspondant au log du nombre moyen d'événements observés sur l'horizon de génération du processus (15 ans ou 55 ans); μ_i est fixée égale à sa vraie valeur, c'est-à-dire que $\mu_i = \frac{1}{\Delta_i} \int_{\Delta_i} \lambda(t) dt$, où $\lambda(t)$ est la fonction d'intensité réelle de l'équation 45 et où Δ_i correspond à l'intervalle i . Les figures 8 et 9 présentent la comparaison entre la fonction d'intensité réelle et la fonction d'intensité estimée en utilisant une discrétisation de l'année en 12 et 26 intervalles, et ce à partir de 15 ans et de 55 ans d'observations pour $\bar{\mu}$ connue.

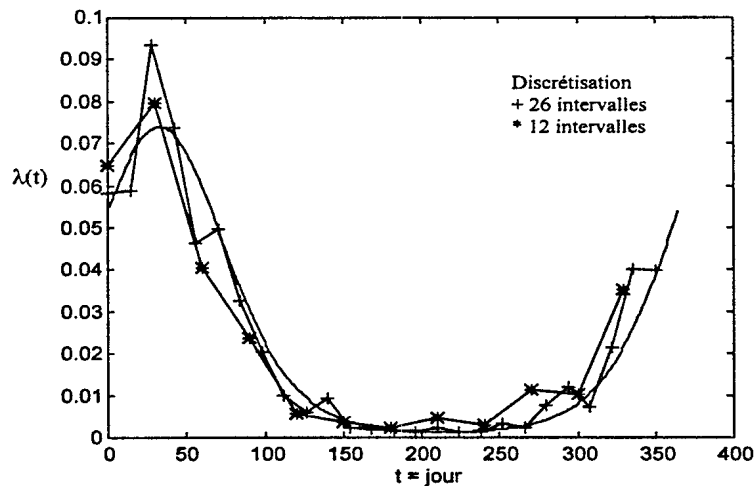


FIGURE 8 - Comparaison de la fonction d'intensité réelle et son estimation bayésienne, période de génération 15 ans, $\bar{\mu}$ connue

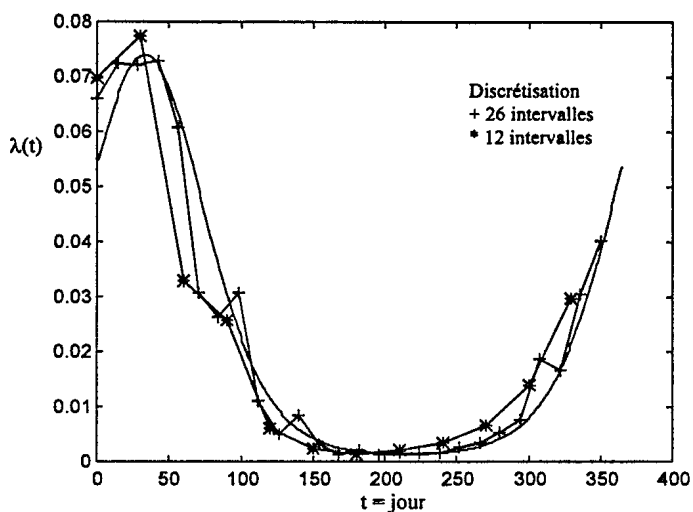


FIGURE 9 - Comparaison de la fonction d'intensité réelle et son estimation bayésienne, période de génération 55 ans, $\bar{\mu}$ connue

4.1.2 Cas où $\bar{\mu}$ est inconnue

Dans ce cas, θ_i est initialisé au log du nombre d'événements observés sur l'intervalle i ou à 0; m , la moyenne a priori de μ_0 , est égale au log du nombre moyen d'événements observés. Les résultats sont présentés aux figures 10 et 11.

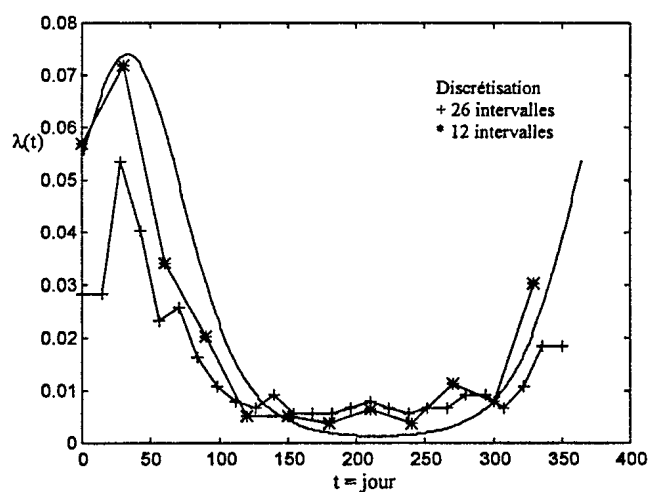


FIGURE 10 - Comparaison de la fonction d'intensité réelle et son estimation bayésienne, période de génération 15 ans, $\bar{\mu}$ inconnue

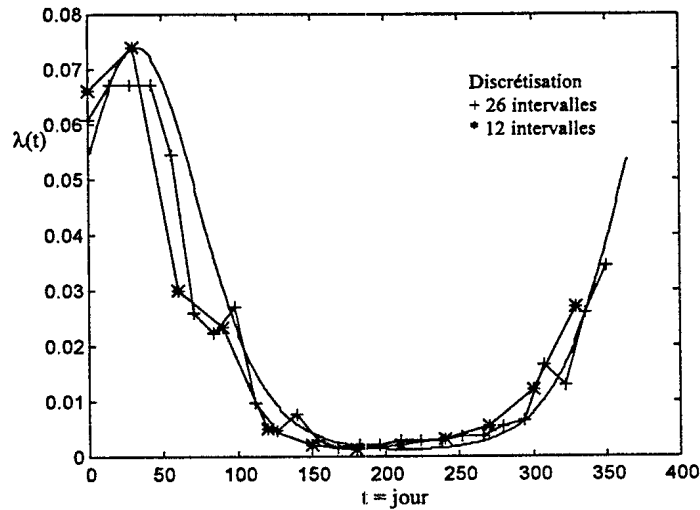


FIGURE 11 - Comparaison de la fonction d'intensité réelle et son estimation bayésienne, période de génération 55 ans, $\bar{\mu}$ inconnue

4.2 Discussion

D'après les figures 8 à 11, qui présentent les estimateurs par la méthode BSP et la fonction d'intensité réelle, il apparaît que la performance de cette méthode est satisfaisante. En comparant les figures 8 et 10, 9 et 11, on vérifie que l'estimation est légèrement meilleure lorsque $\bar{\mu}$ est supposée connue. De plus, il n'est pas surprenant de constater que l'estimation est meilleure lorsqu'on dispose de 55 ans d'observations plutôt que de 15 ans. Les résultats obtenus ont montré que les deux approches convergent après quatre à cinq itérations. De plus, nous avons remarqué que les méthodes d'estimation sont peu sensibles aux valeurs initiales de $\bar{\mu}$ (μ_0 , pour $\bar{\mu}$ inconnue). Quant à la discrétisation, l'utilisation de 26 intervalles ne conduit pas nécessairement à une meilleure estimation que 12 intervalles, ce qui est probablement dû au faible nombre d'événements par intervalle, lorsque l'année est divisée en 26 intervalles.

SANS CLASSIFICATION

Le tableau I présente les variances moyennes des estimateurs de $\hat{\lambda}_i$. Ni le nombre d'intervalles considéré ni l'hypothèse de la connaissance de la moyenne ne semblent avoir d'incidence majeure sur la variance de l'estimateur. Par contre, la longueur de la période de simulation a une influence très significative (la variance est plus grande pour une période de 15 ans).

TABLEAU I

Les variances moyennes de $\hat{\lambda}_i$

Variance moyenne de $\hat{\lambda}_i$ par la méthode bayésienne				
Période	$\bar{\mu}$ connue		$\bar{\mu}$ inconnue	
	12 intervalles	26 intervalles	12 intervalles	26 intervalles
15 ans	1.5×10^{-3}	1.5×10^{-3}	1.4×10^{-3}	1.0×10^{-3}
55 ans	4.1×10^{-4}	4.1×10^{-4}	3.8×10^{-4}	3.8×10^{-4}

5.0 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES FUTURES

Nous avons présenté une méthode d'estimation bayésienne semi-paramétrique de l'intensité d'un processus de Poisson non homogène. L'estimation de la fonction d'intensité est nécessaire pour la modélisation des séries d'événements. Modéliser une série d'événements par un processus ponctuel correspond à obtenir la loi du nombre d'événements sur un intervalle donné et la loi des intervalles entre deux événements. Ces modèles statistiques sont utiles dans plusieurs cadres tels que la planification stratégique et l'allocation des ressources, les plans de maintenance des équipements, l'analyse du risque, etc. Cette modélisation permet de répondre à des questions du genre: quelle est la probabilité de défaillance d'un équipement donné pendant l'exécution d'une mission? Ou encore, quelle est la probabilité qu'il s'écoule x temps entre deux nouveaux incidents au centre de coordination de recherche et sauvetage (CCRS)?

Nous avons supposé que la structure de corrélation entre les intensités discrétisées moyennes est circulaire. Cette structure de corrélation est particulièrement adaptée aux événements dont le taux d'occurrence dépend du temps d'une façon saisonnière, comme les incidents maritimes traités dans un CCRS qui sont plus nombreux l'été que l'hiver. Nous avons développé les expressions analytiques des estimateurs ainsi que leurs variances. De plus, nous avons étudié la performance de cette méthode pour un processus simulé. D'après les résultats obtenus, il apparaît que la performance de cette méthode est satisfaisante. Toutefois, la répétition de l'expérience (réplicats) permettrait d'avoir une idée de l'erreur d'échantillonnage, et un critère de proximité entre la fonction d'intensité estimée et la courbe théorique serait utile pour étudier avec plus de rigueur l'impact du choix des valeurs initiales et du nombre d'intervalles.

L'avantage principal de la méthode bayésienne semi-paramétrique par rapport à la méthode du maximum de vraisemblance est qu'il n'est pas nécessaire de supposer, a priori, une forme complètement paramétrée de la fonction d'intensité. Par contre, cette approche moins efficace (plus grande variance des estimateurs) présente le désavantage d'avoir à découper le temps en intervalles, n'estimant ainsi que des valeurs moyennes d'intensité. Son avantage par rapport à la méthode conventionnelle non paramétrique où

$\hat{\lambda}_i = \frac{\exp\left(\frac{1}{n_i}\right)}{p}$ et $\text{var}(\hat{\lambda}_i) = \frac{\hat{\lambda}_i}{p}$ concerne le cas où il y a des données manquantes, c'est-

à-dire lorsque le nombre d'événements est 0 pour un intervalle donné.

Il existe un pendant continu à cette méthode, présenté par Leonard (1978) [8], qu'il serait intéressant d'approfondir. L'approche continue fournit une estimation deux fois dérivable de la fonction d'intensité. Cette estimation est obtenue en minimisant le log de la fonctionnelle de vraisemblance postérieure à l'aide de techniques provenant du calcul de variation.

6.0 RÉFÉRENCES

1. Lewis, P. A. W., "Recent Results in the Statistical Analysis of Univariate Point Processes", Stochastic Point Processes, ed. P. A. W. Lewis, Wiley and Sons, 1972.
2. Kavvas, M.L., "Point Stochastic Analysis of Daily Rainfall with Applications to Indiana", Thèse de Doctorat, Université Purdue, 1975.
3. North, M., "Processus Hydrologiques Intermittents, Étude de Modélisations Stochastiques et Applications", Thèse de doctorat, no. 419, École polytechnique fédérale de Lausanne, 1981.
4. Cox, D. R., et Lewis P. A. W., "Statistical Analysis of Series of Events", Methuen and Co. Ltd, 1966.
5. Snyder, L., "Random Point Processes", John Wiley & Sons, 485 pages, 1975.
6. Cox, D.R., et Isham V., "Point Processes", Chapman and Hall, 188 pages, 1980.
7. Çinlar, E., "Superposition of Point Processes", dans Stochastic Point Processes: Statistical Analysis, Theory, and Applications, P.A. Lewis (ed.), pp. 549-606, 1973.
8. Bernier, J., "Le Modèle de Renouvellement Non Stationnaire", Électricité de France, Département Laboratoire National d'Hydraulique, no HE 40, 81-11, 1981a.
9. Bernier, J., "Éléments de Statistique Bayésienne", Électricité de France, Département Laboratoire National d'Hydraulique, no HE 40, 81-09, 1981b.

SANS CLASSIFICATION

30

10. Leonard, T., "A Bayesian Method for Histograms", *Biometrika*, vol. 60, no 2, pp. 297-308, 1973.
11. Leonard, T., "Density Estimation, Stochastic Processes and their Prior Information", *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, vol. 40, no 2, pp. 113-146, 1978.
12. Vernos, D., "Application des modèles stochastiques dynamiques linéaires à la description et à la simulation des processus des débits des rivières aux échelles saisonnières et journalières", thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 119 pages, 1982.
13. Berger, J. O., "Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis", Springer-Verlag, 617 pages, 1985.
14. Lehman, E. L., "Theory of Point Estimation", John Wiley and Sons, 1983.
15. Ross, S. M., "A Course in Simulation", Macmillan Publishing Company, 202 pages, 1990.
16. Graybill, F. A., "Matrices with Applications in Statistics", Wadsworth International Group, 2nd edition, 461 pages, 1983.

ANNEXE A - LA MATRICE DE VARIANCE COVARIANCE

Cette annexe présente la matrice de variance-covariance des intensités moyennes qui entre dans l'estimation bayésienne. La matrice de variance-covariance V des intensités moyennes discrètes φ_i ainsi que son déterminant sont nécessaires pour l'estimation bayésienne de la fonction d'intensité du PNH.

La relation circulaire entre les intensités $\varphi_i = a(\varphi_{i-1} + \varphi_{i+1}) + \varepsilon_i$ implique que $\text{Var}(\varphi_i) = V_0$, et $\text{Cov}(\varphi_i, \varphi_{i+j \bmod K}) = V_j \forall i, i = 1..K$. La solution de ce système, telle que les critères de variances égales et de covariances du même ordre égales sont respectés s'écrit:

$$\Phi = M * E \tag{43}$$

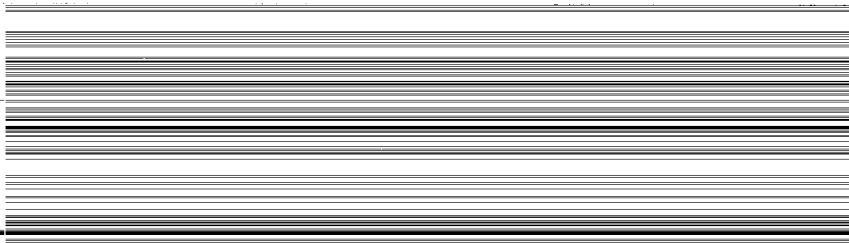
où :

$$M = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{K-1} & k_K \\ k_K & k_1 & k_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{K-2} & k_{K-1} \\ k_{K-1} & k_K & k_1 & k_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{K-2} \\ k_{K-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{K-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_2 & k_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_K & k_1 \end{bmatrix}, E = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_K].$$

Il s'agit d'obtenir M . Or, le système $\varphi_i = a(\varphi_{i-1} + \varphi_{i+1}) + \varepsilon_i$ s'écrit aussi de la manière suivante:

$$\Phi = a * B * E \tag{44}$$

où



SANS CLASSIFICATION

32

$$B = \begin{bmatrix} k_K + k_2 + \frac{1}{a} & k_1 + k_3 & k_2 + k_4 & k_{i-1} + k_{i+1} & \cdot & k_{K-1} + k_1 \\ k_{K-1} + k_1 & k_K + k_2 + \frac{1}{a} & k_1 + k_3 & \cdot & k_{i-1} + k_{i+1} & k_{K-2} + k_K \\ k_{K-2} + k_K & k_{K-1} + k_1 & \cdot & k_1 + k_3 & \cdot & k_{i-1} + k_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1 + k_3 & k_2 + k_4 & \cdot & \cdot & k_{K-1} + k_1 & k_K + k_2 + \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

B est une matrice symmétrique et circulaire, chaque ligne est une permutation d'ordre 1 de la ligne précédente.

(43) et (44) \Rightarrow

$$a*B = M \Rightarrow A*K = E_1 \tag{45}$$

$$\text{où } A = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -a \\ -a & 1 & -a & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -a & 1 & -a & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & -a & 1 & -a & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & -a & 1 & -a & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -a & 1 & -a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -a & 1 & -a & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -a & 1 & -a \\ -a & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -a & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad k_K], \text{ et } E_1 = [1 \quad 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad 0].$$

En utilisant l'équation $A*K = E_1$, il est clair que $M^{-1} = A$, car $M*A = I$. Nous obtenons ainsi, M la solution de 43 en fonction de A.

Nous voulons maintenant calculer V et son inverse C. L'indépendance des $\{\varepsilon_i\}$ implique que V, la matrice de variance-covariance de Φ , est $V = (M^*M^T) \cdot \sigma^2$. C est donc:

$$C = V^{-1} \Rightarrow C = h^*(M^{-1})^2 \Rightarrow C = h^*A^2 \text{ où} \quad (46)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2a^2+1 & -2a & a^2 & 0 & 0 & . & . & 0 & a^2 & -2a \\ -2a & 2a^2+1 & -2a & a^2 & 0 & . & . & . & 0 & a^2 \\ a^2 & -2a & 2a^2+1 & -2a & a^2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a^2 & -2a & . & . & . & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & a^2 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & a^2 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & . & . & . & -2a & a^2 \\ a^2 & 0 & . & . & . & 0 & a^2 & -2a & 2a^2+1 & -2a \\ -2a & a^2 & 0 & . & . & . & 0 & a^2 & -2a & 2a^2+1 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de V

Nous avons que $\det(V) = \frac{1}{h \det(A)}$. Or, A étant une matrice régulière circulante,

son déterminant est $\det(A) = \prod_{i=1}^K \lambda_i$ (réf. 16). λ_i sont les valeurs propres de A telles que

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^{K-1} a_j * \omega_i^j, \text{ où les } \omega_i \text{ sont les K racines de } x^K=1.$$

a_0, a_1, \dots, a_{K-1} représentent les éléments de la première ligne de la matrice A. Nous avons alors, compte tenu de la structure de A :

$$\lambda_i = 1 - a\omega_i - a\omega_i^{K-1} \text{ et } \det(A) = \prod_{i=1}^K (1 - a\omega_i - a\omega_i^{K-1}). \quad (47)$$

En développant, on peut aussi écrire le déterminant de A sous la forme :

$$\det(A) = \left\{ -2a^k + \prod_{m=1}^{K-1} \left(1 + 2a \cos\left(\frac{m\pi}{K}\right) \right) - 2a^2 \prod_{m=1}^{K-2} \left(1 + 2a \cos\left(\frac{m\pi}{K-1}\right) \right) \right\} \quad (48)$$

Car:

$$\det(A) = -a \det(B_{K-1 \times K-1}) + a(-a \det B_{K-2 \times K-2} + (-1)^{K+1} a \det T_{K-2 \times K-2}) + (-1)^{K+1} (-a)(-a \det T_{K-2 \times K-2} + (-1)^{K+1} a \det B_{K-2 \times K-2})$$

$$\text{où } T_{K \times K} = \begin{bmatrix} -a & 1 & -a & 0 & . & 0 \\ 0 & -a & 1 & -a & 0 & . \\ . & 0 & -a & 1 & -a & 0 \\ . & . & 0 & . & 1 & -a \\ . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \quad B_{K \times K} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & . & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & -a & . & 0 \\ . & . & -a & 1 & -a & 0 \\ . & . & . & -a & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 1 \end{bmatrix}$$

et où $\det(T_{K \times K}) = (-a)^K$ et $\det(B_{K \times K}) = \prod_{m=1}^K \left(1 + 2a \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) \right)$ puisque le déterminant d'une

$$\text{matrice Bande } BB_{K \times K} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & 0 & 0 & . & 0 \\ a_2 & a_0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 & a_1 & . & 0 \\ . & . & a_2 & a_0 & a_1 & 0 \\ . & . & . & a_2 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \text{ est:}$$

$$\det(BB_{K \times K}) = \prod_{m=1}^K \left(a_0 + 2\sqrt{a_1 a_2} \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) \right) \quad (49)$$

ANNEXE B - GÉNÉRATION D'UN PNH

L'algorithme de simulation d'un processus de Poisson non homogène d'intensité $\lambda(t)$ sur un horizon de k années, et dont les temps d'arrivée sont $tarriv(s)$ est le suivant (réf. 15):

$tt=0$;

Pour $i=1$ à k

 Pour $j=1$ à 365

$tt:=tt+1$

 Générer u une variable uniforme sur $(0,1)$

 Si $u < \lambda(j)$ alors nouvel événement et $tarriv(\text{nouvel événement})= tt$

 fin

 fin

fin



SANS CLASSIFICATION

DISTRIBUTION INTERNE

CRDV - R - 9713

- 1 - Directeur général adjoint
- 1 - Scientifique en chef
- 6 - Bibliothèque des documents
- 1 - Chef de section, Technologie de l'aide à la décision
- 1 - Dr I. Abi-Zeid (auteure)
- 1 - Mme M. Bélanger
- 1 - M. L. Lamontagne



SANS CLASSIFICATION

DISTRIBUTION EXTERNE

CRDV - R - 9713

- 1 - DRDIM
- 1 - DRDIM (exemplaire non relié)



SANS CLASSIFICATION
COTE DE SÉCURITÉ DE LA FORMULE
(plus haut niveau du titre, du résumé ou des mots-clés)

FICHE DE CONTRÔLE DU DOCUMENT

1. PROVENANCE (le nom et l'adresse) CRDV 2459 boul. Pie XI nord Val-Bélair, Qc G3J 1X5		2. COTE DE SÉCURITÉ (y compris les notices d'avertissement s'il y a lieu) SANS CLASSIFICATION	
3. TITRE (Indiquer la cote de sécurité au moyen de l'abréviation (S,C, R ou NC) mise entre parenthèses, immédiatement après le titre.) "Le développement d'une méthode d'estimation bayésienne pour des séries d'événements non stationnaires" (NC)			
4. AUTEURS (Nom de famille, prénom et initiales. Indiquer les grades militaires, ex.: Bleau, Maj. Louis E.) ABI-ZEID, Irène			
5. DATE DE PUBLICATION DU DOCUMENT (mois et année) 1997		6a. NOMBRE DE PAGES 44	6b. NOMBRE DE RÉFÉRENCES 16
7. DESCRIPTION DU DOCUMENT (La catégorie du document, par exemple rapport, note technique ou memorandum. Indiquer les dates lorsque le rapport couvre une période définie.) Rapport			
8. PARRAIN (le nom et l'adresse) CRDV			
9a. NUMÉRO DU PROJET OU DE LA SUBVENTION (Spécifier si c'est un projet ou une subvention) Projet 3aa11		9b. NUMÉRO DE CONTRACT S/O	
10a. NUMÉRO DU DOCUMENT DE L'ORGANISME EXPÉDITEUR CRDV R-9713		10b. AUTRES NUMÉROS DU DOCUMENT N/A	
11. ACCÈS AU DOCUMENT (Toutes les restrictions concernant une diffusion plus ample du document, autres que celles inhérentes à la cote de sécurité.) <input checked="" type="checkbox"/> Diffusion illimitée <input type="checkbox"/> Diffusion limitée aux entrepreneurs des pays suivants (spécifier) <input type="checkbox"/> Diffusion limitée aux entrepreneurs canadiens (avec une justification) <input type="checkbox"/> Diffusion limitée aux organismes gouvernementaux (avec une justification) <input type="checkbox"/> Diffusion limitée aux ministères de la défense <input type="checkbox"/> Autres (préciser) :			
12. ANNONCE DU DOCUMENT (Toutes les restrictions à l'annonce bibliographique de ce document. Cela correspond, en principe, aux données d'accès au document (11). Lorsqu'une diffusion supplémentaire (à d'autres organismes que ceux précisés à la case 11) est possible, on pourra élargir le cercle de diffusion de l'annonce.)			

SANS CLASSIFICATION
COTE DE LA SÉCURITÉ DE LA FORMULE

SANS CLASSIFICATION
COTE DE LA SECURITE DE LA FORMULE

13. **SOMMAIRE** (Un résumé clair et concis du document. Les renseignements peuvent aussi figurer ailleurs dans le document. Il est souhaitable que le sommaire des documents classifiés soit non classifié. Il faut inscrire au commencement de chaque paragraphe du sommaire la cote de sécurité applicable aux renseignements qui s'y trouvent, à moins que le document lui-même soit non classifié. Se servir des lettres suivantes: (S), (C), (R) ou (NC). Il n'est pas nécessaire de fournir ici des sommaires dans les deux langues officielles à moins que le document soit bilingue.)

Le processus de Poisson non homogène (PNH) est souvent utilisé pour modéliser les séries non stationnaires d'événements indépendants. L'estimation de la fonction d'intensité d'un PNH se fait souvent par la méthode du maximum de vraisemblance. Cette dernière présente le désavantage d'être une méthode paramétrique, nécessitant ainsi la définition a priori d'une forme paramétrée de la fonction d'intensité.

Le but de ce rapport est de présenter une méthode d'estimation semi-paramétrique bayésienne dont la structure de corrélation est circulaire. Les expressions analytiques des estimateurs ainsi que leurs variances sont développées. La performance de la méthode est étudiée pour un processus simulé.

14. **MOTS-CLÉS, DESCRIPTEURS OU RENSEIGNEMENTS SPÉCIAUX** (Expressions ou mots significatifs du point de vue technique, qui caractérisent un document et peuvent aider à le cataloguer. Il faut choisir des termes qui n'exigent pas de cote de sécurité. Des renseignements tels que le modèle de l'équipement, la marque de fabrique, le nom de code du projet militaire, la situation géographique, peuvent servir de mots-clés. Si possible, on doit choisir des mots-clés d'un thésaurus, par exemple le "Thesaurus of Engineering and Scientific Terms (TESTS)". Nommer ce thésaurus. Si l'on ne peut pas trouver de termes non classifiés, il faut indiquer la classification de chaque terme comme on le fait avec le titre.)

Estimation bayésienne
Processus de Poisson
Non homogène
Séries d'événements
Processus ponctuel
Fonction d'intensité

507585

SANS CLASSIFICATION
COTE DE SECURITE DE LA FORMULE