



Defence Research and  
Development Canada

Recherche et développement  
pour la défense Canada



# Comparaison de différents filtres de Kalman et modèles de système pour la navigation

*Yanick Beaudoin  
Université Laval*

*Eric Gagnon  
RDDC Valcartier*

*André Desbiens  
Université Laval*

*René Landry  
École de Technologie Supérieure*

**Defence R&D Canada – Valcartier**

Mémoire technique  
DRDC Valcartier TM 2011-184  
Avril 2012

**Canada** 

# **Comparaison de différents filtres de Kalman et modèles de système pour la navigation**

Yanick Beaudoin  
Université Laval

Eric Gagnon  
RDDC Valcartier

André Desbiens  
Université Laval

René Landry  
École de Technologie Supérieure

**R & D pour la défense Canada – Valcartier**

Mémoire technique

DRDC Valcartier TM 2011-184

Avril 2012

Auteur Principal

*Original signed by Yanick Beaudoin*

---

Yanick Beaudoin

Approuvé par

*Original signed by Alfred Jeffrey, c/sa int.*

---

Marc Lauzon

Chef de section/Armes de précision

Publication approuvée par

*Original signed by Christian Carrier*

---

Christian Carrier

Scientifique en chef/RDDC Valcartier

© Her Majesty the Queen in Right of Canada as represented by the Minister of National Defence, 2012

© Sa Majesté la Reine (en droit du Canada), telle que représentée par le ministre de la Défense nationale, 2012

# Abstract

---

The work presented in this report was realized in the applied research project (ARP) 15eo04 and focuses on the navigation part. In navigation, an approach often used is to merge data from an inertial navigation system (INS) and a global positioning system (GPS) receiver using a Kalman filter. The purpose of this study is to analyze the computational load, accuracy of estimates and robustness to a bias on measurement according to the model and the Kalman filter selected. To do this, a train, moving along a two dimensional predetermined path, is used. Using a train instead of a satellite launcher is intended to simplify the analysis. Initially, the effect of grouping the states is studied. A short sampling period is used, thereby neglecting the effect of eliminating delays inherent in the grouping of states. Then, the states estimate is compared with the error states estimate. Finally, the extended Kalman filter is compared with the unscented Kalman filter.

# Résumé

---

Le travail présenté dans ce rapport s'inscrit dans le projet de recherche appliquée (ARP) 15eo04 et se concentre sur la partie navigation. En navigation, une approche souvent utilisée est de fusionner les données d'une centrale inertielle (INS) et les données d'un récepteur de système de positionnement mondial (GPS) à l'aide d'un filtre de Kalman. Le but de la présente étude est d'analyser la charge de calcul, la précision des estimations et la robustesse à un biais sur une mesure selon le modèle et le filtre de Kalman choisis. Pour ce faire, le déplacement, en deux dimensions, d'un train sur une trajectoire prédéterminée est utilisé. L'utilisation d'un train plutôt qu'un lanceur de satellite a pour but de simplifier l'analyse. Dans un premier temps, l'effet du regroupement des états est étudié. Une période d'échantillonnage courte est utilisée, ce qui permet de négliger l'effet de l'élimination des retards inhérents au regroupement d'états. Ensuite, l'estimation d'états est comparée à l'estimation d'erreur d'états. Finalement, le filtre de Kalman étendu est comparé au filtre de Kalman non parfumé.

Page laissée en blanc à dessein.

# Executive summary

---

## Comparaison de différents filtres de Kalman et modèles de système pour la navigation

Yanick Beaudoin, Eric Gagnon, André Desbiens, René Landry; DRDC Valcartier TM 2011-184; Defence R&D Canada – Valcartier; April 2012.

Actually, Canada has a good expertise in satellite development. However, the satellites developed in Canada are all put in orbit by foreign launchers. This dependency, sustained by Canada for several decades, has created a situation where the country is not always able to put its satellites in orbit inside a timeframe which respects its requirements. The Canadian Space Agency has recently ordered two feasibility studies aimed at the development of a small Canadian launcher. The results of these studies have identified some risk technical elements, including the availability of the guidance, navigation and control (GNC) systems required, and the limited Canadian expertise in space launcher GNC.

The work presented in this report was realized in the applied research project (ARP) 15eo04, which has for main objective to identify viable guidance, navigation and control (GNC) concepts in support of the possible development of a Canadian small launcher to put micro satellites in orbit. Also, the 15eo04 project aims to develop a Canadian expertise in space launcher GNC.

Navigation is a critical element on a launcher. It is important to know the position and speed of the launcher at any time and with the best possible accuracy, to be able to correct its trajectory properly. In navigation, an approach often used to increase accuracy is to merge data from an inertial navigation system (INS) and a global positioning system (GPS) receiver using a Kalman filter. The purpose of this study is to analyze the computational load, accuracy of estimates and robustness to a bias on measurement according to the model and the Kalman filter selected. To do this, a train, moving along a two dimensional predetermined path, is used. Using a train instead of a satellite launcher is intended to simplify the analysis. Initially, the effect of grouping the states is studied. To neglect the elimination of delays inherent to the grouping of states, a short sampling period is used. Then, the estimate of states is compared with the estimated error states. Finally, the extended Kalman filter is compared with the unscented Kalman filter.

The study on the effect of grouping states shows that it is advantageous to limit the number of states of the model. Indeed, grouping states can reduce the computational load by about 30%, eliminate linear dependencies between states, simplify the setting of the covariance matrix of states and, when the sampling period is long, eliminate significant delays. Regarding the comparison between the states estimation and error states estimation revealed that the choice depends on the implementation context. Indeed, the burden of calculation

is similar and the estimates are very similar. The choice is then made by considering the type of equipment used. Finally, the comparison between the unscented Kalman filter and extended Kalman filter has found that the last one reduces the computational load by about 70% while offering similar accuracy. Moreover, with the model and the trajectory chosen, the extended Kalman filter is less sensitive to the adjustment of the states covariance matrix of the filter.

Several other interesting aspects will be explored later in this study, assessing the robustness during loss of GPS signals, using different sampling frequencies between the GPS and the INS, effect of long sampling periods and adding states to the model to estimate the bias on the measurements. Tests will also be performed on a 3D model with 6 degrees of freedom. This model includes more non-linearities that will perhaps highlight the advantages of the unscented Kalman filter.

# Sommaire

---

## Comparaison de différents filtres de Kalman et modèles de système pour la navigation

Yanick Beaudoin, Eric Gagnon, André Desbiens, René Landry ; DRDC Valcartier TM 2011-184 ; R & D pour la défense Canada – Valcartier ; avril 2012.

Actuellement, le Canada a une bonne expertise dans le développement de satellites. Cependant, les satellites développés au Canada sont tous mis en orbite par des lanceurs étrangers. Cette dépendance, entretenue depuis plusieurs décennies par le Canada, a créé une situation où le pays n'est pas toujours capable de mettre ses satellites en orbite dans une fenêtre de temps qui respecte ses besoins. L'Agence Spatiale Canadienne a récemment commandé deux études de faisabilité visant le développement d'un petit lanceur canadien. Les résultats de ces études ont identifié certains éléments techniques à risque dont la disponibilité des systèmes de guidage, navigation et contrôle (GNC) requis, et l'expertise limitée du Canada en GNC de lanceurs spatiaux.

Le travail présenté dans ce rapport s'inscrit dans le projet de recherche appliquée (ARP) 15eo04 qui a pour objectif principal d'identifier des concepts de guidage, navigation et contrôle (GNC) viables en support au développement éventuel d'un petit lanceur canadien pour la mise en orbite de micro satellites. Le projet 15eo04 vise également à développer une expertise canadienne en GNC de lanceurs spatiaux.

La navigation est un élément critique sur un lanceur. Il est primordial de connaître la position et la vitesse du lanceur en tout temps et avec la meilleure précision possible, pour être en mesure de corriger sa trajectoire adéquatement. En navigation, une approche souvent utilisée pour augmenter la précision est de fusionner les données d'une centrale inertielle (INS) et les données d'un récepteur de système de positionnement mondial (GPS) à l'aide d'un filtre de Kalman. Le but de la présente étude est d'analyser la charge de calcul, la précision des estimations et la robustesse à un biais sur une mesure selon le modèle et le filtre de Kalman choisis. Pour ce faire, le déplacement, en deux dimensions, d'un train sur une trajectoire prédéterminée est utilisé. L'utilisation d'un train plutôt qu'un lanceur de satellite a pour but de simplifier l'analyse. Dans un premier temps, l'effet du regroupement des états est étudié. Pour négliger l'élimination des retards, inhérente au regroupement d'états, une période d'échantillonnage courte est utilisée. Ensuite, l'estimation d'états est comparée à l'estimation d'erreur d'états. Finalement, le filtre de Kalman étendu est comparé au filtre de Kalman non parfumé.

L'étude sur l'effet du regroupement des états montre qu'il est avantageux de limiter le nombre d'états du modèle. En effet, regrouper les états permet de diminuer la charge de calcul d'environ 30%, d'éliminer les dépendances linéaires entre les états, de simplifier le



réglage de la matrice de covariance des états et, lorsque la période d'échantillonnage est longue, d'éliminer des retards non négligeables. Pour sa part, la comparaison entre l'estimation d'états et l'estimation d'erreur d'états a permis de découvrir que le choix dépend du contexte d'implémentation. En effet, la charge de calcul est semblable et les estimations sont très similaires. Le choix s'effectue alors en considérant le type d'équipements utilisés. Finalement, la comparaison entre le filtre de Kalman non parfumé et le filtre de Kalman étendu a permis de constater que ce dernier réduit la charge de calcul d'environ 70% tout en offrant une précision équivalente. Par contre, avec le modèle et la trajectoire choisis, le filtre de Kalman étendu est moins sensible à l'ajustement de la matrice de covariance des états du filtre.

Plusieurs autres aspects intéressants seront explorés dans la suite de cette étude, soit l'évaluation de la robustesse lors de la perte des signaux GPS, l'utilisation de fréquences d'échantillonnages différentes entre le récepteur GPS et la centrale inertielle, l'effet de périodes d'échantillonnages longues et l'ajout d'états au modèle pour estimer le biais sur les mesures. Des tests seront également effectués sur un modèle 3D possédant 6 degrés de liberté. Ce modèle comportant plus de non-linéarités permettra peut-être de mettre en valeur les avantages du filtre de Kalman non parfumé.

# Table des matières

---

Abstract . . . . .	i
Résumé . . . . .	i
Executive summary . . . . .	iii
Sommaire . . . . .	v
Table des matières . . . . .	vii
Liste des figures . . . . .	ix
Liste des tableaux . . . . .	x
1 Introduction . . . . .	1
2 Méthodologie . . . . .	2
2.1 Trajectoire de référence . . . . .	2
2.2 Bruits de capteurs . . . . .	3
3 Effet du regroupement des états . . . . .	5
3.1 Modèle 0 . . . . .	5
3.2 Modèle 1 . . . . .	10
3.3 Modèle 2 . . . . .	11
3.4 Modèle 3 . . . . .	12
3.5 Résultats . . . . .	13
4 Comparaison entre l'estimation d'états et l'estimation d'erreur d'états . . . . .	15
4.1 Présentation du modèle . . . . .	15
4.2 Résultats . . . . .	17
5 Comparaison entre le filtre de Kalman étendu et le filtre de Kalman non parfumé .	21
5.1 Filtre de Kalman étendu . . . . .	21
5.2 Filtre de Kalman non parfumé . . . . .	21

5.3	Résultats . . . . .	22
6	Conclusion et perspectives d'avenir . . . . .	24
	Références . . . . .	25
	Notation . . . . .	27

# Liste des figures

---

Figure 1:	Trajectoire de référence . . . . .	3
Figure 2:	Vitesse de référence . . . . .	3
Figure 3:	Représentation d'états . . . . .	17
Figure 4:	Représentation d'erreur d'états . . . . .	18
Figure 5:	Observateur en représentation d'erreur d'états . . . . .	20
Figure 6:	Observateur en représentation d'états . . . . .	20

# Liste des tableaux

---

Tableau 1:	Données sans biais . . . . .	4
Tableau 2:	Données avec biais . . . . .	4
Tableau 3:	Matrice de corrélation entre les états du modèle 0 . . . . .	9
Tableau 4:	Matrice de corrélation entre les états du modèle 1 . . . . .	11
Tableau 5:	Temps relatif de calcul en fonction du regroupement des états . . . . .	13
Tableau 6:	Regroupement des états sur les données sans biais . . . . .	14
Tableau 7:	Regroupement des états sur les données avec biais . . . . .	14
Tableau 8:	Estimation d'états et estimation d'erreur d'états sur les données sans biais . . . . .	19
Tableau 9:	Estimation d'états et estimation d'erreur d'états sur les données avec biais . . . . .	19
Tableau 10:	Temps relatif de calcul de l'estimation d'états et de l'estimation d'erreur d'états . . . . .	20
Tableau 11:	Temps relatif de calcul pour les deux filtres de Kalman . . . . .	22
Tableau 12:	Filtre de Kalman étendu et filtre de Kalman non parfumé sur données sans biais . . . . .	23
Tableau 13:	Filtre de Kalman étendu et filtre de Kalman non parfumé sur données avec biais . . . . .	23

# 1 Introduction

---

Actuellement, le Canada a une bonne expertise dans le développement de satellites. Cependant, les satellites développés au Canada sont tous mis en orbite par des lanceurs étrangers. Cette dépendance, entretenue depuis plusieurs décennies par le Canada, a créé une situation où le pays n'est pas toujours capable de mettre ses satellites en orbite dans une fenêtre de temps qui respecte ses besoins. L'Agence Spatiale Canadienne a récemment commandé deux études de faisabilité visant le développement d'un petit lanceur canadien. Les résultats de ces études ont identifié certains éléments techniques à risque dont la disponibilité des systèmes de guidage, navigation et contrôle (GNC) requis, et l'expertise limitée du Canada en GNC de lanceurs spatiaux.

Le travail présenté dans ce rapport s'inscrit dans le projet de recherche appliquée (ARP) 15eo04 qui a pour objectif principal d'identifier des concepts de guidage, navigation et contrôle (GNC) viables en support au développement éventuel d'un petit lanceur canadien pour la mise en orbite de micro satellites. Le projet 15eo04 vise également à développer une expertise canadienne en GNC de lanceurs spatiaux.

La navigation est un élément critique sur un lanceur. Il est primordial de connaître la position et la vitesse du lanceur en tout temps et avec la meilleure précision possible, pour être en mesure de corriger sa trajectoire adéquatement. En navigation, une approche souvent utilisée est de fusionner les données d'une centrale inertielle (INS) et les données d'un récepteur de système de positionnement mondial (GPS) à l'aide d'un filtre de Kalman. Le but de la présente étude est d'analyser la charge de calcul, la précision des estimations et la robustesse à un biais sur une mesure selon le modèle et le filtre de Kalman choisi. Pour ce faire, le déplacement, en deux dimensions, d'un train sur une trajectoire prédéterminée est utilisé. L'utilisation d'un train plutôt qu'un lanceur de satellite a pour but de simplifier l'analyse. La section 2 présente la méthodologie et les paramètres de simulations. La section 3 présente l'effet du regroupement des états. La section 4 présente la comparaison entre l'estimation d'états et l'estimation d'erreur d'états. La section 5 présente la comparaison entre le filtre de Kalman étendu et filtre de Kalman non parfumé.

## 2 Méthodologie

---

Pour simplifier l'analyse, cette étude utilise le déplacement d'un train sur une distance relativement courte plutôt qu'un lanceur de satellites. Ce déplacement est supposé sur une surface plane à une altitude nulle par rapport au niveau de la mer. Ces hypothèses permettent de considérer un modèle en deux dimensions. Les paramètres estimés sont la vitesse du train dans le référentiel Est-North-Up (ENU) et la position du train dans le référentiel Latitude-Longitude-Height (LLH).

Les comparaisons réalisées portent spécifiquement sur trois aspects ; la charge de calcul, la précision des estimations et la robustesse à un biais sur une mesure. Les deux premiers aspects sont étudiés à l'aide de données non biaisées (tableau 1) alors que le troisième aspect est étudié à l'aide de données biaisées (tableau 2). Pour simplifier l'analyse, une opération post-traitement convertit les données de position LLH en données de position ENU (exprimées en mètres). Dans le but d'être indépendants de l'ordinateur utilisé pour effectuer les calculs, les temps de simulations sont donnés en temps relatif. Le temps référence utilisé est celui de la simulation en estimation d'erreur d'états sur filtre de Kalman étendu présentée à la section 5.

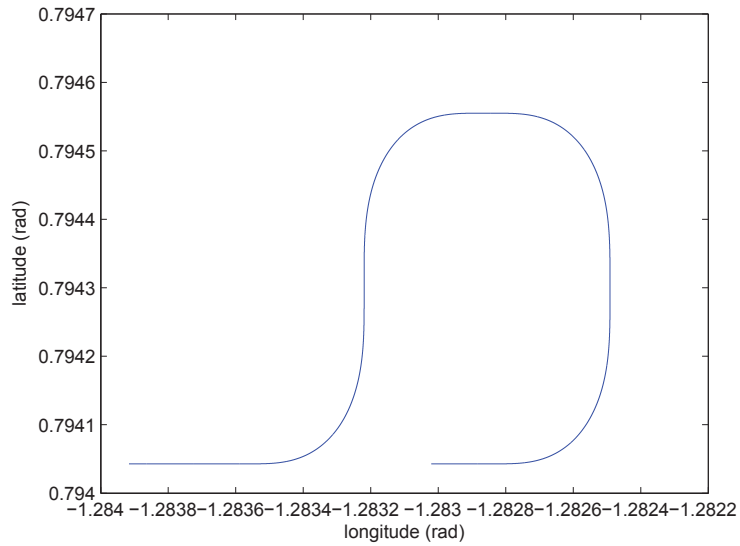
Pour évaluer la précision des estimations et la robustesse à un biais sur une mesure, les données de position et de vitesse fournies par les observateurs de Kalman sont comparées à la trajectoire de référence réelle. L'erreur quadratique moyenne (EQM) et la variance de l'erreur sont utilisées comme bases de comparaisons.

Pour cette étude, les échantillonnages de la centrale inertielle et du récepteur GPS sont considérés comme synchronisés. De plus, la période d'échantillonnage doit être courte pour permettre de négliger les retards liés à l'utilisation de modèles discrets. Donc, la période d'échantillonnage de la centrale inertielle et du récepteur GPS est fixée à 0,01s. De plus, les lectures GPS sont considérées comme étant toujours disponibles. Finalement, pour le calcul des matrices de covariances d'états, la période d'échantillonnage est considérée suffisamment courte pour négliger la propagation du bruit dans le temps [1]. En ce qui concerne l'ajustement des paramètres du filtre de Kalman, la variance du bruit d'états est ajustée par incrément de puissance de 10 en fonction de minimiser l'EQM de la position et de la vitesse lors des simulations avec le signal sans biais (voir section 2.2).

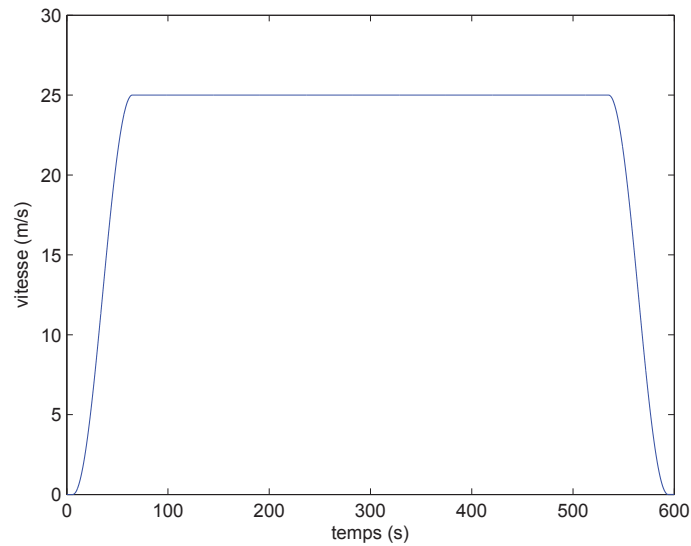
### 2.1 Trajectoire de référence

Les figures 1 et 2 présentent respectivement la trajectoire de référence et la vitesse de référence du train. Cette trajectoire provient des données accompagnant le document de Lavoie et Landry [2], celle-ci est quelconque et ne tient pas compte du terrain réel. Cette trajectoire est conçue pour ne pas passer par la discontinuité présente aux pôles. Cette discontinuité provient d'une division par 0 dans les équations d'états. Les simulations durent 600 se-

condes et la période d'échantillonnage est de 0,01 seconde ce qui donne 60000 lectures simulées.



**Figure 1:** Trajectoire de référence



**Figure 2:** Vitesse de référence

## 2.2 Bruits de capteurs

Les tableaux 1 et 2 présentent les perturbations ajoutées à chacun des signaux. Les bruits ajoutés sont des bruits blancs à moyenne nulle auxquels le biais indiqué est ajouté. Les



données sans biais sont générées à partir des données de trajectoire réelle accompagnant le document de Lavoie et Landry [2] et les données avec biais proviennent des données accompagnant ce même document.

**Tableau 1: Données sans biais**

	<b>Signal</b>	<b>Variance</b>
<b>GPS</b>	Position	$1 \times 10^{-12} \text{ rad}^2$
	Vitesse	$1 \times 10^{-1} (\text{m/s})^2$
<b>INS</b>	Accélération	$5 \times 10^{-2} (\text{m/s}^2)^2$
	Angle	$5 \times 10^{-3} \text{ rad}^2$

**Tableau 2: Données avec biais**

	<b>Signal</b>	<b>Variance</b>	<b>Biais</b>
<b>GPS</b>	Position	$1 \times 10^{-12} \text{ rad}^2$	$0 \text{ rad}$
	Vitesse	$1 \times 10^{-1} (\text{m/s})^2$	$0 \text{ m/s}$
<b>INS</b>	Accélération	$5 \times 10^{-2} (\text{m/s}^2)^2$	$5 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$
	Angle	$5 \times 10^{-3} \text{ rad}^2$	$0 \text{ rad}$

### 3 Effet du regroupement des états

Pour l'étude de l'effet du regroupement des états, l'estimation d'états pour un filtre de Kalman non parfumé est utilisée. Le premier modèle considéré estime toutes les variables intermédiaires utilisées dans le calcul de la position LLH à partir des lectures de la centrale inertielle. Par la suite, les états sont regroupés graduellement jusqu'à l'obtention d'un modèle estimant seulement la position LLH et la vitesse ENU du train. Le regroupement des états élimine des retards, créant ainsi des différences entre les modèles. Par contre, la période d'échantillonnage considérée étant très courte, l'effet des retards éliminés est négligeable, ainsi les modèles sont considérés comme équivalents. Dans tous les cas, le vecteur de mesures d'entrée du filtre de Kalman est le vecteur de sortie de la centrale inertielle :

$$\begin{bmatrix} A_{xc}(k) \\ A_{yc}(k) \\ \psi(k) \end{bmatrix} = \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}_u(k) \quad (1)$$

où  $A$  est l'accélération instantanée, les indices  $xc$  et  $yc$  sont respectivement les directions suivant les axes X et Y du référentiel de la centrale inertielle,  $\psi$  est l'orientation du référentiel de la centrale inertielle par rapport au nord dans le sens horaire et  $\mathbf{u}$  est le vecteur de données non bruitées de la centrale inertielle auxquelles est ajouté le bruit de mesure,  $\mathbf{w}_u$ .

Le vecteur de mesures de sortie du filtre de Kalman  $\mathbf{y}$  est le vecteur de sortie du récepteur GPS :

$$\mathbf{y}(k) = h_j(\mathbf{x}_j(k)) + \mathbf{v}(k) = \begin{bmatrix} V_{e_j}(k) \\ V_{n_j}(k) \\ \phi_j(k) \\ \lambda_j(k) \end{bmatrix} + \mathbf{v}(k) \quad (2)$$

où  $\mathbf{x}_j$  est le vecteur d'états du modèle  $j$  auquel est ajouté le bruit de mesure du récepteur GPS,  $\mathbf{v}$ . Le vecteur d'états est défini comme suit :  $V$  représentent la vitesse instantanée, les indices  $e$  et  $n$  représentent les directions est et nord et  $\phi_j$  et  $\lambda_j$  représentent la latitude et la longitude. Finalement,  $h_j$  est la fonction d'observation du modèle  $j$ .

Le modèle d'états considéré est le suivant :

$$\mathbf{y}(k) = h_j(\mathbf{x}_j(k)) + \mathbf{v}(k) \quad (3)$$

$$\mathbf{x}_j(k+1) = f_j(\mathbf{x}_j(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{w}_j(k) \quad (4)$$

$$\mathbf{w}_j(k) = \mathbf{w}_{x_j}(k) + f_i(\mathbf{0}, \mathbf{w}_u(k)) \quad (5)$$

où  $f_j$  est l'équation d'évolution des états du modèle  $j$ ,  $\mathbf{w}_j$  est le bruit combiné sur les états du modèle  $j$  et  $\mathbf{w}_{x_j}$  est le bruit sur les états du modèle  $j$ .

#### 3.1 Modèle 0

Le modèle 0 est basé sur une approche où l'équation de propagation d'états est tout simplement constituée des équations de mouvement qui permettent de faire le calcul de la position

LLH à partir des mesures de la centrale inertielle. Dans un premier temps, les mesures de la centrale inertielle sont utilisées pour obtenir l'accélération dans le référentiel ENU. La rotation de l'accélération du référentiel de la centrale inertiel vers le référentiel ENU est modélisée par les équations suivantes :

$$A_e(k+1) = A_{xc}(k) \sin(\psi(k)) + A_{yc}(k) \cos(\psi(k)) \quad (6)$$

$$A_n(k+1) = A_{xc}(k) \cos(\psi(k)) - A_{yc}(k) \sin(\psi(k)) \quad (7)$$

Ensuite, l'accélération est intégrée pour obtenir la vitesse, ce qui est modélisé par les équations suivantes :

$$V_e(k+1) = A_e(k)T + V_e(k) \quad (8)$$

$$V_n(k+1) = A_n(k)T + V_n(k) \quad (9)$$

où  $T$  représente la période d'échantillonnage.

Pour le calcul de la variation de la latitude, le rayon de courbure méridien,  $M$ , et le rayon de courbure normal,  $N$ , de la Terre sont nécessaires [3]. Ceux-ci sont modélisés par les équations suivantes :

$$M(k+1) = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2(\phi(k)))^{\frac{3}{2}}} \quad (10)$$

$$N(k+1) = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2(\phi(k)))^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

où  $a$  est le demi grand axe de la Terre et  $e$  est l'excentricité de la Terre

À partir de la vitesse du train, du rayon de courbure méridien de la Terre et du rayon de courbure normal de la Terre, on trouve la variation de latitude,  $\dot{\phi}$ , et de longitude,  $\dot{\lambda}$ , ce qui est modélisé par les équations suivantes [3] :

$$\dot{\phi}(k+1) = \frac{V_n(k)}{M(k)} \quad (12)$$

$$\dot{\lambda}(k+1) = \frac{V_e(k)}{N(k) \cos(\phi(k))} \quad (13)$$

Finalement, les variations de latitude et de longitude sont intégrées pour trouver la latitude,  $\phi$ , et la longitude,  $\lambda$ , ce qui est modélisé par les équations suivantes :

$$\phi(k+1) = \dot{\phi}(k)T + \phi(k) \quad (14)$$

$$\lambda(k+1) = \dot{\lambda}(k)T + \lambda(k) \quad (15)$$

Les équations (6) à (15) sont regroupées pour former l'équation d'évolution d'états du modèle 0 :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_0(k+1) &= \begin{bmatrix} A_{xc_0}(k+1) \\ A_{yc_0}(k+1) \\ \psi_0(k+1) \\ A_{e_0}(k+1) \\ A_{n_0}(k+1) \\ V_{e_0}(k+1) \\ V_{n_0}(k+1) \\ M_0(k+1) \\ N_0(k+1) \\ \dot{\phi}_0(k+1) \\ \dot{\lambda}_0(k+1) \\ \phi_0(k+1) \\ \lambda_0(k+1) \end{bmatrix} = f_0(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{w}_0(k) \\
 &= \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \\ A_{xc_0}(k) \sin(\psi_0(k)) + A_{yc_0}(k) \cos(\psi_0(k)) \\ A_{xc_0}(k) \cos(\psi_0(k)) - A_{yc_0}(k) \sin(\psi_0(k)) \\ A_{e_0}(k)T + V_{e_0}(k) \\ A_{n_0}(k)T + V_{n_0}(k) \\ \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2(\phi_0(k)))^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{a}{(1-e^2 \sin^2(\phi_0(k)))^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{V_{n_0}(k)}{M_0(k)} \\ \frac{V_{e_0}(k)}{N_0(k) \cos(\phi_0(k))} \\ \dot{\phi}_0(k)T + \phi_0(k) \\ \dot{\lambda}_0(k)T + \lambda_0(k) \end{bmatrix} + \mathbf{w}_0(k) \quad (16)
 \end{aligned}$$

On remarque que l'accélération instantanée dans le référentiel de la centrale inertielle ainsi que l'orientation du référentiel de la centrale inertielle font partie de la représentation d'états. Ceci permet d'avoir des estimations filtrées de ces valeurs lorsque le modèle est utilisé avec un filtre de Kalman.

Une analyse de la signification des variables de la représentation d'états laisse croire qu'il existe plusieurs dépendances linéaires. En effet, la variation de longitude est proportion-

nelle à la vitesse dans la direction est :

$$\dot{\lambda}_0 \propto V_{e_0} \quad (17)$$

La variation de latitude est proportionnelle à la vitesse dans la direction nord :

$$\dot{\phi}_0 \propto V_{n_0} \quad (18)$$

Pour leur part, le rayon de courbure méridien et le rayon de courbure normal varient en fonction de la latitude :

$$M_0 \propto \phi_0 \quad (19)$$

$$N_0 \propto \phi_0 \quad (20)$$

En considérant que  $\phi_0$ ,  $M_0$  et  $N_0$  varient peu sur cette trajectoire, les dépendances linéaires des relations (17) et (18) peuvent être démontrées à partir de l'équation (16) :

$$\dot{\lambda}_0(k+1) = \frac{V_{e_0}(k)}{N_0(k) \cos(\phi_0(k))} \propto V_{e_0}(k) \quad (21)$$

$$\dot{\phi}_0(k+1) = \frac{V_{n_0}(k)}{M_0(k)} \propto V_{n_0}(k) \quad (22)$$

Pour vérifier les dépendances linéaires, la trajectoire de référence est simulée sur ce modèle en utilisant les données non bruitées de la centrale inertielle. Une analyse de la matrice de corrélation des états (tableau 3) permet de confirmer ces dépendances linéaires, mises en évidence par un fond gris, qui risquent de créer des problèmes lors de l'utilisation du filtre de Kalman.

**Tableau 3: Matrice de corrélation entre les états du modèle 0**

	$\hat{A}_{xi}$	$\hat{A}_{yi}$	$\hat{\psi}$	$\hat{A}_e$	$\hat{A}_n$	$\hat{V}_e$	$\hat{V}_n$	$\hat{M}$	$\hat{N}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\lambda}$
$\hat{A}_{xi}$	1	-0,232	-0,478	-0,000	0,194	0,347	0,162	-0,198	-0,198	0,162	0,347	-0,198	-0,578
$\hat{A}_{yi}$	-0,232	1	0,174	-0,000	-0,490	-0,110	-0,410	0,500	0,500	-0,409	-0,109	0,500	0,441
$\hat{\psi}$	-0,478	0,174	1	-0,000	0,219	-0,680	-0,648	-0,367	-0,367	-0,648	-0,680	-0,367	0,511
$\hat{A}_e$	-0,000	-0,000	-0,000	1	-0,278	-0,000	0,330	-0,118	-0,118	0,330	-0,000	-0,118	-0,480
$\hat{A}_n$	0,194	-0,490	0,219	-0,278	1	-0,401	-0,000	-0,715	-0,715	-0,000	-0,401	-0,715	-0,100
$\hat{V}_e$	0,347	-0,110	-0,680	-0,000	-0,401	1	0,201	0,422	0,422	0,201	1,000	0,422	-0,385
$\hat{V}_n$	0,162	-0,410	-0,648	0,330	-0,000	0,201	1	-0,000	-0,000	1,000	0,201	-0,000	-0,565
$\hat{M}$	-0,198	0,500	-0,367	-0,118	-0,715	0,422	-0,000	1	1,000	-0,000	0,423	1,000	0,437
$\hat{N}$	-0,198	0,500	-0,367	-0,118	-0,715	0,422	-0,000	1,000	1	-0,000	0,423	1,000	0,437
$\hat{\phi}$	0,162	-0,409	-0,648	0,330	-0,000	0,201	1,000	-0,000	-0,000	1	0,201	-0,000	-0,565
$\hat{\lambda}$	0,347	-0,109	-0,680	-0,000	-0,401	1,000	0,201	0,423	0,423	0,201	1	0,423	-0,385
$\hat{\phi}$	-0,198	0,500	-0,367	-0,118	-0,715	0,422	-0,000	1,000	1,000	-0,000	0,423	1	0,437
$\hat{\lambda}$	-0,578	0,441	0,511	-0,480	-0,100	-0,385	-0,565	0,437	0,437	-0,565	-0,385	0,437	1

Comme l'utilisation d'un filtre de Kalman avec un modèle qui comporte des dépendances linéaires peut impliquer l'inversion d'une matrice singulière, l'utilisation de ce modèle est risquée. Par exemple, dans l'équation :

$$K(k) = P^-(k)H^T(k) [H(k)P^-(k)H^T(k) + R(k)]^{-1} \quad (23)$$

qui permet le calcul de la matrice de gains du filtre de Kalman,  $K$  [4]. Si la matrice de covariance de l'erreur d'estimation a priori,  $P^-$ , est singulière, que la matrice d'observation,  $H$ , est une matrice identité et que la matrice de bruit de mesures,  $R$ , est négligeable devant le terme  $H(k)P^-(k)H^T(k)$ , l'équation (23) implique l'inversion d'une matrice singulière.

De plus, le calcul des points sigmas du filtre de Kalman non parfumé implique le calcul de la racine carrée de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation. Or, la racine carrée d'une matrice singulière n'existe pas toujours.

Dans certains cas, le réglage de la matrice de covariance de bruit d'états, le réglage de la matrice de covariance de bruit de mesures ou le réglage de ces deux matrices permet à un modèle qui comporte des dépendances linéaires de fonctionner. Cependant, dans ce cas, les performances ne sont pas nécessairement optimales. Un test a permis de vérifier qu'il est possible de faire fonctionner le filtre de Kalman avec ce modèle. Toutefois, une matrice de covariance de bruit d'états non représentative de la réalité a dû être utilisée. Le modèle 0 n'est donc pas utilisé dans ce comparatif.

## 3.2 Modèle 1

Dans ce modèle, l'approche préconisée afin d'éliminer les dépendances linéaires est de combiner des états. Le calcul de  $M$  (équation (10)) est inséré dans le calcul de  $\dot{\phi}$  (équation (12)) et le calcul de  $N$  (équation (11)) est inséré dans le calcul de  $\dot{\lambda}$  (équation (13)), ce qui permet d'éliminer les dépendances linéaires exprimées par les relations (19) et (20). Ensuite, le calcul de  $\dot{\phi}$  (équation (12)) est inséré dans le calcul de  $\phi$  (équation (14)) et le calcul de  $\dot{\lambda}$  (équation (13)) est inséré dans le calcul de  $\lambda$  (équation (15)) pour éliminer les dépendances linéaires exprimées par les relations (17) et (18). Toutes ces modifications éliminent plusieurs retards dans le calcul des états.

Ces modifications permettent d'obtenir le modèle suivant, nommé modèle 1 dans ce document :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(k+1) &= \begin{bmatrix} A_{xc_1}(k+1) \\ A_{yc_1}(k+1) \\ \psi_1(k+1) \\ A_{e_1}(k+1) \\ A_{n_1}(k+1) \\ V_{e_1}(k+1) \\ V_{n_1}(k+1) \\ \phi_1(k+1) \\ \lambda_1(k+1) \end{bmatrix} = f_1(\mathbf{x}_1(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{w}_1(k) \\
&= \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \\ A_{xc_1}(k) \sin(\psi_1(k)) + A_{yc_1}(k) \cos(\psi_1(k)) \\ A_{xc_1}(k) \cos(\psi_1(k)) - A_{yc_1}(k) \sin(\psi_1(k)) \\ A_{e_1}(k)T + V_{e_1}(k) \\ A_{n_1}(k)T + V_{n_1}(k) \\ V_{n_1}(k) \frac{(1-e^2 \sin^2(\phi_1(k)))^{\frac{3}{2}}}{a(1-e^2)} T + \phi_1(k) \\ V_{e_1}(k) \frac{(1-e^2 \sin^2(\phi_1(k)))^{\frac{1}{2}}}{a \cos(\phi_1(k))} T + \lambda_1(k) \end{bmatrix} + \mathbf{w}_1(k) \quad (24)
\end{aligned}$$

Une analyse de la matrice de corrélation entre les états de ce modèle (tableau 4) permet de valider l'élimination des dépendances linéaires.

**Tableau 4:** Matrice de corrélation entre les états du modèle 1

	$\hat{A}_{xi}$	$\hat{A}_{yi}$	$\hat{\psi}$	$\hat{A}_e$	$\hat{A}_n$	$\hat{V}_e$	$\hat{V}_n$	$\hat{\phi}$	$\hat{\lambda}$
$\hat{A}_{xi}$	1	-0,232	-0,478	-0,000	0,194	0,347	0,162	-0,198	-0,578
$\hat{A}_{yi}$	-0,232	1	0,174	-0,000	-0,490	-0,110	-0,410	0,500	0,441
$\hat{\psi}$	-0,478	0,174	1	-0,000	0,219	-0,680	-0,648	-0,367	0,511
$\hat{A}_e$	-0,000	-0,000	-0,000	1	-0,278	-0,000	0,330	-0,118	-0,480
$\hat{A}_n$	0,194	-0,490	0,219	-0,278	1	-0,401	-0,000	-0,715	-0,100
$\hat{V}_e$	0,347	-0,110	-0,680	-0,000	-0,401	1	0,201	0,422	-0,385
$\hat{V}_n$	0,162	-0,410	-0,648	0,330	-0,000	0,201	1	-0,000	-0,565
$\hat{\phi}$	-0,198	0,500	-0,367	-0,118	-0,715	0,422	-0,000	1	0,437
$\hat{\lambda}$	-0,578	0,441	0,511	-0,480	-0,100	-0,385	-0,565	0,437	1

### 3.3 Modèle 2

Dans le modèle 2, le vecteur de mesures d'entrée du filtre de Kalman  $\mathbf{u}$  est utilisé directement dans les calculs de  $A_e$  (équation (6)) et  $A_n$  (équation (7)). Cette simplification élimine



les états représentant l'accélération instantanée dans le référentiel de la centrale inertielle ainsi que l'orientation du référentiel de la centrale inertielle. De plus, elle permet d'éliminer un retard d'une période d'échantillonnage par rapport au modèle 1. On obtient ainsi le modèle 2 suivant :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_2(k+1) &= \begin{bmatrix} A_{e_2}(k+1) \\ A_{n_2}(k+1) \\ V_{e_2}(k+1) \\ V_{n_2}(k+1) \\ \phi_2(k+1) \\ \lambda_2(k+1) \end{bmatrix} = f_2(\mathbf{x}_2(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{w}_2(k) \\
 &= \begin{bmatrix} u_1(k) \sin(u_3(k)) + u_2(k) \cos(u_3(k)) \\ u_1(k) \cos(u_3(k)) - u_2(k) \sin(u_3(k)) \\ A_{e_2}(k)T + V_{e_2}(k) \\ A_{n_2}(k)T + V_{n_2}(k) \\ V_{n_2}(k) \frac{(1-e^2 \sin^2(\phi_2(k)))^{\frac{3}{2}}}{a(1-e^2)} T + \phi_2(k) \\ V_{e_2}(k) \frac{(1-e^2 \sin^2(\phi_2(k)))^{\frac{1}{2}}}{a \cos(\phi_2(k))} T + \lambda_2(k) \end{bmatrix} + \mathbf{w}_2(k) \quad (25)
 \end{aligned}$$

### 3.4 Modèle 3

Il est possible de simplifier le modèle 2 en insérant les calculs de  $A_e$  (équation (6)) et  $A_n$  (équation (7)) respectivement dans ceux de  $V_e$  (équation (8)) et  $V_n$  (équation (9)). En plus de simplifier le modèle 2, cette modification élimine un autre retard d'une période d'échantillonnage. On obtient ainsi le modèle 3 suivant :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_3(k+1) &= \begin{bmatrix} V_{e_3}(k+1) \\ V_{n_3}(k+1) \\ \phi_3(k+1) \\ \lambda_3(k+1) \end{bmatrix} = f_3(\mathbf{x}_3(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{w}_3(k) \\
 &= \begin{bmatrix} (u_1(k) \sin(u_3(k)) + u_2(k) \cos(u_3(k))) T + V_{3_e}(k) \\ (u_1(k) \cos(u_3(k)) - u_2(k) \sin(u_3(k))) T + V_{3_n}(k) \\ V_{n_3}(k) \frac{(1-e^2 \sin^2(\phi_3(k)))^{\frac{3}{2}}}{a(1-e^2)} T + \phi_3(k) \\ V_{e_3}(k) \frac{(1-e^2 \sin^2(\phi_3(k)))^{\frac{1}{2}}}{a \cos(\phi_3(k))} T + \lambda_3(k) \end{bmatrix} + \mathbf{w}_3(k) \quad (26)
 \end{aligned}$$

### 3.5 Résultats

Chaque modèle est utilisé sur un observateur de type filtre de Kalman non parfumé pour estimer la trajectoire de référence. Les tests sont effectués selon la méthodologie présentée à la section 2.

Le tableau 5 montre une diminution de la charge de calcul lorsque le nombre d'états diminue. Il était possible de prédire cette diminution de la charge de calcul. Par contre, la charge de calcul ne diminue pas de façon linéaire avec le nombre d'états. En effet, les calculs liés aux états éliminés n'ont pas disparu, mais sont plutôt intégrés dans les calculs d'autres états.

**Tableau 5:** Temps relatif de calcul en fonction du regroupement des états

	Temps relatif de simulation
<b>Modèle 1</b>	5,1
<b>Modèle 2</b>	4,2
<b>Modèle 3</b>	3,5

Les tableaux 6 et 7 montrent que tous les modèles donnent des résultats similaires. Les différences observées sont attribuables à l'ajustement de la matrice de covariance d'états. Pour les données non biaisées, le modèle 3 donne des estimations avec la variance de l'erreur la plus faible. À l'opposé, pour des données biaisées, ce même modèle donne les estimations dont la variance de l'erreur est la plus élevée, ce qui laisse croire que la matrice de covariance du bruit d'états des modèles 1 et 2 est probablement légèrement surestimée, permettant de capturer le biais dans la variance.

Ces résultats montrent que, lorsque les états intermédiaires ne sont pas nécessaires, il est avantageux de regrouper les calculs dans un nombre d'états restreint. En effet, regrouper les états permet de réduire la charge de calcul et d'éliminer les dépendances linéaires. De plus, le nombre réduit d'états simplifie le réglage de la matrice de covariance. Finalement, regrouper les états permet d'éliminer des retards qui peuvent devenir non négligeables lorsque la période d'échantillonnage est longue.

**Tableau 6:** Regroupement des états sur les données sans biais

	<b>EQM (position) [m]</b>	<b>Variance de l'erreur (position est) [m<sup>2</sup>]</b>	<b>Variance de l'erreur (position nord) [m<sup>2</sup>]</b>	<b>EQM (vitesse) [m/s]</b>	<b>Variance de l'erreur (vitesse est) [(m/s)<sup>2</sup>]</b>	<b>Variance de l'erreur (vitesse nord) [(m/s)<sup>2</sup>]</b>
<b>Modèle 1</b>	$1,3204 \times 10^{-3}$	$2,2544 \times 10^{-2}$	$7,0871 \times 10^{-2}$	$1,5272 \times 10^{-4}$	$6,7153 \times 10^{-4}$	$7,3421 \times 10^{-4}$
<b>Modèle 2</b>	$1,3159 \times 10^{-3}$	$2,2570 \times 10^{-2}$	$7,0109 \times 10^{-2}$	$1,5213 \times 10^{-4}$	$6,6351 \times 10^{-4}$	$7,3148 \times 10^{-4}$
<b>Modèle 3</b>	$0,9386 \times 10^{-3}$	$1,6700 \times 10^{-2}$	$3,2743 \times 10^{-2}$	$1,5178 \times 10^{-4}$	$6,5522 \times 10^{-4}$	$7,3367 \times 10^{-4}$

**Tableau 7:** Regroupement des états sur les données avec biais

	<b>EQM (position) [m]</b>	<b>Variance de l'erreur (position est) [m<sup>2</sup>]</b>	<b>Variance de l'erreur (position nord) [m<sup>2</sup>]</b>	<b>EQM (vitesse) [m/s]</b>	<b>Variance de l'erreur (vitesse est) [(m/s)<sup>2</sup>]</b>	<b>Variance de l'erreur (vitesse nord) [(m/s)<sup>2</sup>]</b>
<b>Modèle 1</b>	$9,3059 \times 10^{-3}$	$6,2777 \times 10^{-1}$	$4,3531 \times 10^{-1}$	$4,5359 \times 10^{-4}$	$6,9265 \times 10^{-3}$	$4,7269 \times 10^{-3}$
<b>Modèle 2</b>	$9,2989 \times 10^{-3}$	$6,2308 \times 10^{-1}$	$4,3221 \times 10^{-1}$	$4,5191 \times 10^{-4}$	$6,8796 \times 10^{-3}$	$4,6935 \times 10^{-3}$
<b>Modèle 3</b>	$9,6434 \times 10^{-3}$	$7,5001 \times 10^{-1}$	$5,0591 \times 10^{-1}$	$4,2578 \times 10^{-4}$	$6,1378 \times 10^{-3}$	$4,1661 \times 10^{-3}$

## 4 Comparaison entre l'estimation d'états et l'estimation d'erreur d'états

---

Dans la section précédente, les observateurs considérés sont basés sur des modèles qui estiment directement les états du système. Une autre approche possible est d'utiliser un observateur basé sur un modèle qui estime l'erreur d'états. Cette forme du filtre de Kalman fournit une estimation de l'erreur entre les états estimés et les états réels. Cette section effectue la comparaison entre l'estimation d'erreur d'état et l'estimation d'états. Pour cette comparaison, le modèle 3 (équation (26)) est comparé à son équivalent en estimation d'erreur d'états.

### 4.1 Présentation du modèle

Dans l'estimation d'erreur d'état, le vecteur de mesures de sortie du filtre de Kalman est la différence entre les mesures GPS et leurs équivalents calculés à partir des mesures de la centrale inertielle. Pour obtenir ces dernières, un modèle de navigation à l'estime (dead reckoning) doit être utilisé. Le modèle de navigation à l'estime permet également de calculer la latitude qui est nécessaire au modèle d'estimation d'erreur d'états.

Le modèle d'états utilisé pour représenter le modèle de navigation à l'estime est :

$$\mathbf{y}_{dr}(k) = h_{dr}(\mathbf{x}_{dr}(k)) \quad (27)$$

$$\mathbf{x}_{dr}(k+1) = f_{dr}(\mathbf{x}_{dr}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{w}_{dr}(k) \quad (28)$$

$$\mathbf{w}_{dr}(k) = f_{dr}(\mathbf{0}, \mathbf{w}_u(k)) \quad (29)$$

où l'indice  $dr$  indique le modèle du module de navigation à l'estime. la définition du vecteur  $\mathbf{y}_{dr}$  est :

$$\mathbf{y}_{dr}(k) = \begin{bmatrix} V_{e_{dr}}(k) \\ V_{n_{dr}}(k) \\ \phi_{dr}(k) \\ \lambda_{dr}(k) \end{bmatrix} \quad (30)$$

et la définition du vecteur  $\mathbf{x}_{dr}$  est :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{dr}(k+1) &= \begin{bmatrix} V_{e_{dr}}(k+1) \\ V_{n_{dr}}(k+1) \\ \phi_{dr}(k+1) \\ \lambda_{dr}(k+1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (u_1(k) \sin(u_3(k)) + u_2(k) \cos(u_3(k))) T + V_{e_{dr}}(k) \\ (u_1(k) \cos(u_3(k)) - u_2(k) \sin(u_3(k))) T + V_{n_{dr}}(k) \\ V_{n_{dr}}(k) \frac{(1-e^2 \sin^2(\phi_{dr}(k)))^{\frac{3}{2}}}{a(1-e^2)} T + \phi_{dr}(k) \\ V_{e_{dr}}(k) \frac{(1-e^2 \sin^2(\phi_{dr}(k)))^{\frac{1}{2}}}{a \cos(\phi_{dr}(k))} T + \lambda_{dr}(k) \end{bmatrix} + \mathbf{w}_{dr}(k) \quad (31) \end{aligned}$$

Le modèle d'états utilisé pour l'estimation d'erreur d'états est :

$$\delta \mathbf{y}(k) = h_{ee}(\delta \mathbf{x}(k)) + \mathbf{v}(k) \quad (32)$$

$$\delta \mathbf{x}(k+1) = f_{ee}(\delta \mathbf{x}(k), \mathbf{0}, \phi_{dr}(k)) + \mathbf{w}_{x_3}(k) \quad (33)$$

où l'indice  $ee$  indique le modèle d'estimation d'erreur d'états,  $\delta \mathbf{y}$  est la différences entre les mesures GPS et leurs équivalents calculés à partir des mesures de la centrale inertielle et  $\delta \mathbf{x}$  est le vecteur d'erreur d'états. la définition du vecteur  $\delta \mathbf{y}$  est :

$$\delta \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \delta V_e(k) \\ \delta V_n(k) \\ \delta \phi(k) \\ \delta \lambda(k) \end{bmatrix} + \mathbf{v}(k) \quad (34)$$

où  $\delta V$  est l'erreur sur la vitesse instantanée,  $\delta \phi$  est l'erreur sur la latitude et  $\delta \lambda$  est l'erreur sur la longitude. la définition du vecteur  $\delta \mathbf{x}$  est :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} \delta V_e(k+1) \\ \delta V_n(k+1) \\ \delta \phi(k+1) \\ \delta \lambda(k+1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta V_e(k) \\ \delta V_n(k) \\ \delta V_n(k) \frac{(1-e^2 \sin^2(\phi_{dr}(k)))^{\frac{3}{2}}}{a(1-e^2)} T + \delta \phi(k) \\ \delta V_e(k) \frac{(1-e^2 \sin^2(\phi_{dr}(k)))^{\frac{1}{2}}}{a \cos(\phi_{dr}(k))} T + \delta \lambda(k) \end{bmatrix} + \mathbf{w}_{x_3}(k) \quad (35) \end{aligned}$$

Considérant les similitudes entre le modèle d'estimation d'erreur d'états (équation (35)) et le modèle 3 d'estimation d'états (équation (26)), le bruit d'états  $w_{x_3}$  est considéré identique pour ces deux modèles.

Les figures 3 et 4 présentent la différence entre les deux types d'implémentations. Le modèle d'estimation d'états est équivalent à combiner le modèle de navigation à l'estime et le modèle d'estimation d'erreur d'états. Quelques manipulations mathématiques permettent aussi de voir que les deux modèles sont équivalents :

$$\mathbf{x}_3(k+1) = \mathbf{x}_{dr}(k+1) + \delta\mathbf{x}(k+1) \quad (36)$$

$$\mathbf{x}_3(k+1) = f_{dr}(\mathbf{x}_{dr}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{w}_{dr}(k) + f_{ee}(\delta\mathbf{x}(k), \mathbf{0}, \phi_{dr}(k)) + \mathbf{w}_{x_3}(k) \quad (37)$$

En développant  $f_{dr}$  et  $f_{ee}$  et en regroupant les termes, on trouve :

$$\mathbf{x}_3(k+1) = f_{dr}(\mathbf{x}_{dr}(k) + \delta\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + f_{dr}(\mathbf{0}, \mathbf{w}_u(k)) + \mathbf{w}_{x_3}(k) \quad (38)$$

En considérant  $\phi_{dr} = \phi_3$ , on retrouve l'équation du modèle 3 :

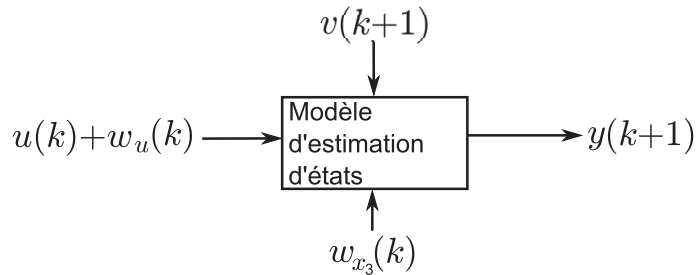
$$\mathbf{x}_3(k+1) = f_3(\mathbf{x}_3(k), \mathbf{u}(k)) + f_3(\mathbf{0}, \mathbf{w}_u(k)) + \mathbf{w}_{x_3}(k) \quad (39)$$

Un développement similaire sur l'équation de sortie permet de retrouver l'équation de sortie du modèle 3 :

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}_{dr}(k) + \delta\mathbf{y}(k) \quad (40)$$

$$\mathbf{y}(k) = h_{dr}(\mathbf{x}_{dr}(k)) + h_{ee}(\delta\mathbf{x}(k)) + \mathbf{v}(k) \quad (41)$$

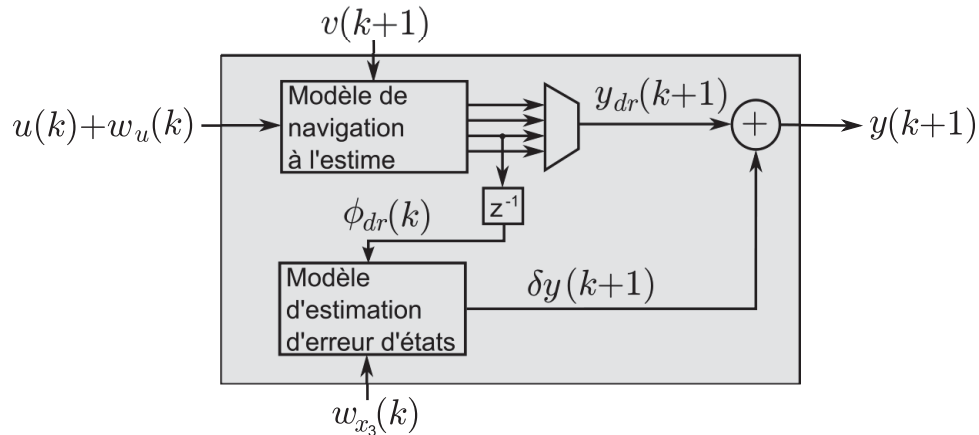
$$\mathbf{y}(k) = h_3(\mathbf{x}_3(k)) + \mathbf{v}(k) \quad (42)$$



**Figure 3:** Représentation d'états

## 4.2 Résultats

Les deux modèles sont utilisés sur un observateur de type filtre de Kalman non parfumé pour estimer la trajectoire de référence. Les tests sont effectués selon la méthodologie présentée à la section 2.



**Figure 4:** Représentation d'erreur d'états

Les tableaux 8 et 9 montrent que l'estimation d'états et l'estimation d'erreur d'états permettent d'obtenir sensiblement les mêmes estimations d'états du système. Les différences observées sont tout simplement causées par la précision numérique. De plus, le tableau 10 montre que les deux modèles ont une charge de calcul comparable, et ce, même si le modèle de navigation à l'estime est simulé en parallèle dans le cas de l'estimation d'erreur d'états. En ne considérant que les deux points précédents, il n'y a aucun avantage à utiliser un modèle plutôt que l'autre.

Par contre, en ce qui concerne l'implémentation, l'estimation d'erreur d'états comporte plusieurs avantages. Premièrement, le filtre de Kalman n'utilise pas les mesures de la centrale inertielle comme mesures d'entrée, mais seulement les mesures du récepteur GPS comme mesures de sortie (figure 5). Puisque les deux modèles fonctionnent normalement à une fréquence différente, ceci permet d'ajuster la fréquence d'échantillonnage du filtre de Kalman à celle du GPS, l'implémentation en est simplifiée. De plus, certaines configurations utilisent un modèle de navigation à l'estime de type "boîte noire" dans laquelle il est impossible de corriger les états. Pour ce type de configuration, l'estimation d'erreur d'états peut tout simplement être soustraite de la sortie du modèle de navigation à l'estime. Finalement, une partie des calculs est effectuée par le modèle de navigation à l'estime, donc si ce modèle est externe, la charge de calcul est séparée. À l'opposé, l'avantage de l'estimation d'états est qu'elle élimine le besoin d'avoir un modèle de navigation à l'estime en utilisant directement les lectures de la centrale inertielle. En effet, dans ce modèle les lectures d'accéléromètres et de gyroscopes sont fournies directement comme des lectures d'entrée au filtre de Kalman (figure 6).

**Tableau 8:** Estimation d'états et estimation d'erreur d'états sur les données sans biais

	<b>EQM (position) [m]</b>	<b>Variance de l'erreur (position est) [m<sup>2</sup>]</b>	<b>Variance de l'erreur (position nord) [m<sup>2</sup>]</b>	<b>EQM (vitesse) [m/s]</b>	<b>Variance de l'erreur (vitesse est) [(m/s)<sup>2</sup>]</b>	<b>Variance de l'erreur (vitesse nord) [(m/s)<sup>2</sup>]</b>
<b>États</b>	$9,3855 \times 10^{-4}$	$1,6700 \times 10^{-2}$	$3,2743 \times 10^{-2}$	$1,5178 \times 10^{-4}$	$6,5522 \times 10^{-4}$	$7,3367 \times 10^{-4}$
<b>Erreur d'états</b>	$9,3855 \times 10^{-4}$	$1,6700 \times 10^{-2}$	$3,2743 \times 10^{-2}$	$1,5178 \times 10^{-4}$	$6,5522 \times 10^{-4}$	$7,3367 \times 10^{-4}$

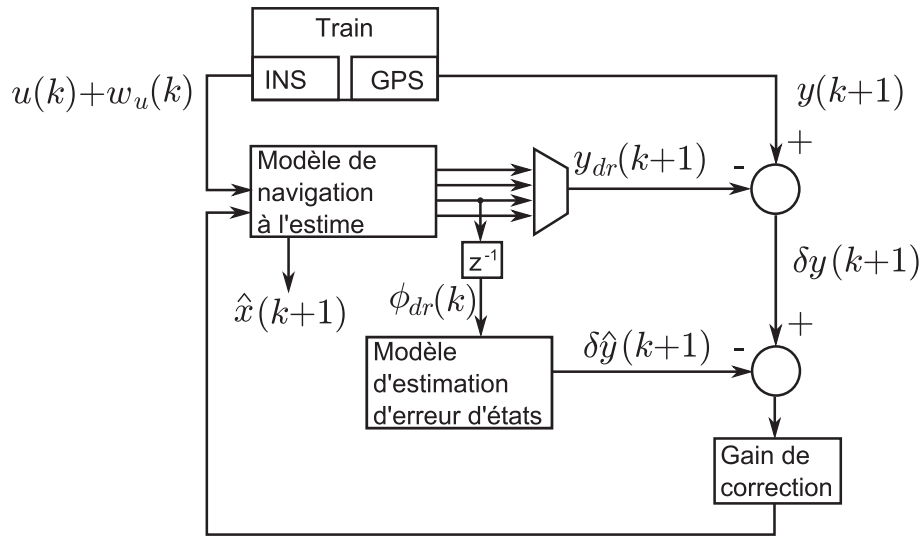
**Tableau 9:** Estimation d'états et estimation d'erreur d'états sur les données avec biais

	<b>EQM (position) [m]</b>	<b>Variance de l'erreur (position est) [m<sup>2</sup>]</b>	<b>Variance de l'erreur (position nord) [m<sup>2</sup>]</b>	<b>EQM (vitesse) [m/s]</b>	<b>Variance de l'erreur (vitesse est) [(m/s)<sup>2</sup>]</b>	<b>Variance de l'erreur (vitesse nord) [(m/s)<sup>2</sup>]</b>
<b>États</b>	$9,6434 \times 10^{-3}$	$7,5001 \times 10^{-1}$	$5,0591 \times 10^{-1}$	$4,2578 \times 10^{-4}$	$6,1378 \times 10^{-3}$	$4,1661 \times 10^{-3}$
<b>Erreur d'états</b>	$9,6435 \times 10^{-3}$	$7,5000 \times 10^{-1}$	$5,0591 \times 10^{-1}$	$4,2578 \times 10^{-4}$	$6,1378 \times 10^{-3}$	$4,1661 \times 10^{-3}$

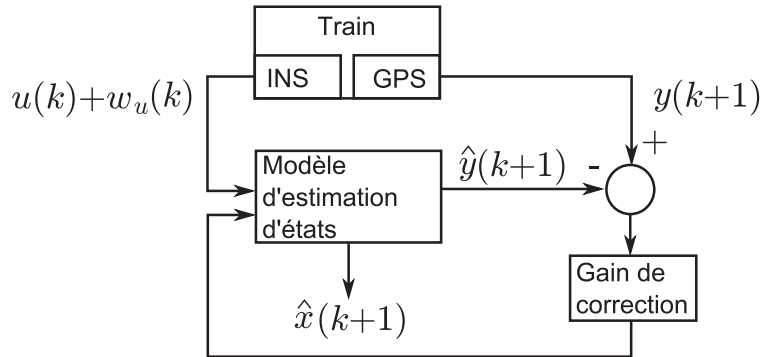


**Tableau 10:** Temps relatif de calcul de l'estimation d'états et de l'estimation d'erreur d'états

	Temps relatif de simulation
États	3,5
Erreur d'états	3,4



**Figure 5:** Observateur en représentation d'erreur d'états



**Figure 6:** Observateur en représentation d'états

## 5 Comparaison entre le filtre de Kalman étendu et le filtre de Kalman non parfumé

---

Il existe plusieurs formes du filtre de Kalman : filtre de Kalman standard, filtre de Kalman étendu, filtre de Kalman non parfumé, filtre de Kalman généralisé, etc. [4, 5, 6, 7, 8]. On s'intéresse ici à deux formes de celui-ci, le filtre de Kalman étendu et le filtre de Kalman non parfumé. Le filtre de Kalman non parfumé a été choisi, car il est réputé offrir d'excellentes performances sur des modèles non linéaires. De son côté, le filtre de Kalman étendu a été choisi, car son utilisation est très répandue, ce qui en fait également une bonne référence.

### 5.1 Filtre de Kalman étendu

Le filtre de Kalman étendu est probablement le plus connu et utilisé pour des systèmes non linéaires. Sous cette forme, les matrices d'évolution des états et d'observation sont linéarisées à chacune des itérations. Ceci permet d'utiliser les équations du filtre de Kalman standard, qui lui, est linéaire. Malgré le fait que la convergence de cette forme du filtre de Kalman est très difficile (voir impossible) à prouver, des essais en simulation ont montré que dans la majorité des cas celui-ci converge [4]. Le développement mathématique du filtre de Kalman étendu dépasse le cadre de ce document et peut être trouvé dans d'autres ouvrages [1, 4].

### 5.2 Filtre de Kalman non parfumé

Le filtre de Kalman non parfumé offre plusieurs avantages par rapport au filtre de Kalman étendu. Premièrement, le filtre de Kalman non parfumé donne une précision de calcul comparable à un filtre de Kalman étendu dans lequel une linéarisation par série de Taylor du deuxième ordre est utilisée. Donc, lorsque le processus est fortement non linéaire ou pendant la phase d'initialisation du filtre, le filtre de Kalman non parfumé a théoriquement une meilleure précision que le filtre de Kalman étendu. De plus, l'utilisation du filtre de Kalman non parfumé ne nécessite pas le calcul de la matrice Jacobienne, ce qui est le cas du filtre de Kalman étendu. Finalement, le filtre de Kalman non parfumé peut être utilisé sur des modèles où les équations ne sont pas dérivables de façons continues, ce qui n'est pas le cas du filtre de Kalman étendu [4, 5, 6]. Le développement mathématique du filtre de Kalman non parfumé dépasse le cadre de ce document et peut être trouvé dans d'autres ouvrages [4, 5, 6].

## 5.3 Résultats

Les deux filtres sont utilisés pour estimer la trajectoire de référence. Comme la section précédente conclue que l'estimation d'erreur d'états requiert un temps de calcul légèrement inférieur à l'estimation d'états, celle-ci est donc utilisée pour la comparaison entre les filtres. Les tests sont effectués selon la méthodologie présentée à la section 2.

Le tableau 11 montre que filtre de Kalman non parfumé utilise une charge de calcul nettement supérieure au filtre de Kalman étendu. Le tableau 12 montre que sur les données sans biais, les deux filtres donnent des résultats équivalents. Le tableau 13 montre que lorsque les signaux comportent un biais, le filtre de Kalman étendu donne de meilleurs résultats. Il ne faut cependant pas oublier que la matrice de covariance des états a été ajustée à l'aide d'essais effectués avec les données sans biais. En modifiant la matrice de covariance des états, il est possible d'améliorer les résultats du filtre de Kalman non parfumé sur les données avec biais. Par contre, cette modification dégrade les résultats obtenus avec les données sans biais. Donc, pour cette simulation, le filtre de Kalman étendu est moins sensible à l'ajustement de la matrice de covariance des états que le filtre de Kalman non parfumé. Aussi, le modèle considéré évolue lentement dans le temps, ce qui le rend presque linéaire. Sur un système linéaire, les deux types de filtres donnent des résultats presque identiques. Un autre avantage du filtre de Kalman non parfumé est d'éliminer la nécessité de calculer les matrices Jacobiennes du système. Par contre, dans le modèle considéré, celle-ci est très simple à calculer. Ainsi, pour le cas considéré, les principaux avantages du filtre de Kalman non parfumé, meilleure résistance aux fortes non-linéarités et l'élimination de la nécessité de calculer la matrice Jacobienne ne sont pas présents.

**Tableau 11:** Temps relatif de calcul pour les deux filtres de Kalman

	Temps relatif de simulation
Étendu	1,0
Non parfumé	3,4

**Tableau 12:** Filtre de Kalman étendu et filtre de Kalman non parfumé sur données sans biais

	<b>EQM (position) [m]</b>	<b>Variance de l'erreur (position est) [m<sup>2</sup>]</b>	<b>Variance de l'erreur (position nord) [m<sup>2</sup>]</b>	<b>EQM (vitesse) [m/s]</b>	<b>Variance de l'erreur (vitesse est) [(m/s)<sup>2</sup>]</b>	<b>Variance de l'erreur (vitesse nord) [(m/s)<sup>2</sup>]</b>
<b>Étendu</b>	$7,9509 \times 10^{-4}$	$1,4631 \times 10^{-2}$	$2,0164 \times 10^{-2}$	$1,5094 \times 10^{-4}$	$6,4781 \times 10^{-4}$	$7,2543 \times 10^{-4}$
<b>Non parfumé</b>	$9,3855 \times 10^{-4}$	$1,6700 \times 10^{-2}$	$3,2743 \times 10^{-2}$	$1,5178 \times 10^{-4}$	$6,5522 \times 10^{-4}$	$7,3367 \times 10^{-4}$

**Tableau 13:** Filtre de Kalman étendu et filtre de Kalman non parfumé sur données avec biais

	<b>EQM (position) [m]</b>	<b>Variance de l'erreur (position est) [m<sup>2</sup>]</b>	<b>Variance de l'erreur (position nord) [m<sup>2</sup>]</b>	<b>EQM (vitesse) [m/s]</b>	<b>Variance de l'erreur (vitesse est) [(m/s)<sup>2</sup>]</b>	<b>Variance de l'erreur (vitesse nord) [(m/s)<sup>2</sup>]</b>
<b>Étendu</b>	$8,7120 \times 10^{-3}$	$1,1216 \times 10^{-1}$	$1,0515 \times 10^{-1}$	$4,6045 \times 10^{-4}$	$7,1408 \times 10^{-3}$	$4,8953 \times 10^{-3}$
<b>Non parfumé</b>	$9,6435 \times 10^{-3}$	$7,5000 \times 10^{-1}$	$5,0591 \times 10^{-1}$	$4,2578 \times 10^{-4}$	$6,1378 \times 10^{-3}$	$4,1661 \times 10^{-3}$

## 6 Conclusion et perspectives d'avenir

---

Le bon choix de modèle et de type de filtre permet d'améliorer la précision des estimations tout en diminuant la charge de calcul. L'étude sur l'effet du regroupement des états montre qu'il est avantageux de limiter le nombre d'états du modèle. En effet, regrouper les états permet de diminuer la charge de calcul d'environ 30%, d'éliminer les dépendances linéaires entre les états, de simplifier le réglage de la matrice de covariance des états et, lorsque la période d'échantillonnage est longue, d'éliminer des retards non négligeables. Pour sa part, la comparaison entre l'estimation d'états et l'estimation d'erreur d'états a permis de découvrir que le choix dépend du contexte d'implémentation. En effet, la charge de calcul est semblable et les estimations sont très similaires. Le choix s'effectue alors en considérant le type d'équipements utilisés. Finalement, la comparaison entre le filtre de Kalman non parfumé et le filtre de Kalman étendu a permis de constater que ce dernier réduit la charge de calcul d'environ 70%. De plus avec le modèle et la trajectoire choisis, le filtre de Kalman étendu est moins sensible à l'ajustement de la matrice de covariance des états.

Plusieurs autres aspects intéressants seront explorés dans la suite de cette étude, soit l'évaluation de la robustesse lors de la perte des signaux GPS, l'utilisation de fréquences d'échantillonnages différentes entre le récepteur GPS et la centrale inertielle, l'effet de périodes d'échantillonnages longues et l'ajout d'états au modèle pour estimer le biais sur les mesures. Des tests seront également effectués sur un modèle 3D possédant 6 degrés de liberté. Ce modèle comportant plus de non-linéarités permettra peut-être de mettre en valeur les avantages du filtre de Kalman non parfumé.

# Références

---

- [1] Savage, P. G. (2007), Strapdown analytics, Strapdown Associates, Inc.
- [2] Lavoie, P. et Landry, R. Jr. (2010), Cahier des laboratoires. Cours MGA-850 “Navigation aérienne, GNSS et systèmes inertiels embarqués”, École de technologie supérieure.
- [3] Landry, R. Jr. et Li, D. (2010), Notes du cours. Cours MGA-850 “Navigation aérienne, GNSS et systèmes inertiels embarqués”, École de technologie supérieure.
- [4] Crassidis, J. L. et Junkins, J. L. (2004), Optimal estimation of dynamic systems, Chapman & Hall/CRC.
- [5] Julier, S. J., Uhlmann, J. K. et Durrant-Whyte, H. F. (1995), A new approach for filtering nonlinear systems, Dans *Proceedings of the American Control Conference*, Vol. 3, pp. 1628–1632, Seattle, WA, USA.
- [6] Julier, S. J., Uhlmann, J. K. et Durrant-Whyte, H. F. (2000), A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(3), pp. 477–482.
- [7] Lachance, L. (2007), Observation de procédés basée sur des sous-modèles, thèse de Doctorat, Université Laval, département de génie électrique et génie informatique.
- [8] Xue-Dong, W. et Zhi-Huan, S. (2008), GEKF, GUKF and GGPF based prediction of chaotic time-series with additive and multiplicative noises, *Chinese Physics B*, 17(9), p. 3241.

Page laissée en blanc à dessein.

# Notation

---

## Lettres latines

$A$	accélération instantanée
$a$	demi grand axe de la Terre
$e$	excentricité de la Terre
$H$	matrice d'observation
$R$	matrice de covariance de bruit de mesures
$K$	matrice de gains du filtre de Kalman
$M$	rayon de courbure méridien de la Terre
$N$	rayon de courbure normal de la Terre
$P^-$	matrice de covariance de l'erreur d'estimation a priori
$T$	période d'échantillonnage
$u$	données non bruitées de la centrale inertielle
$V$	vitesse instantanée
$v$	bruit sur les mesures de sortie
$w$	bruit combiné sur les états
$w_u$	bruit sur les mesures d'entrée
$w_x$	bruit sur les états
$x$	vecteur d'états
$y$	mesures du récepteur GPS

## Lettres grecques

$\delta\lambda$	erreur sur la longitude
$\delta\phi$	erreur sur la latitude
$\delta V$	erreur sur la vitesse instantanée
$\delta x$	vecteur d'erreur d'états
$\delta y$	différences entre les mesures GPS et leurs équivalents calculés à partir des mesures de la centrale inertielle
$\dot{\lambda}$	variation de longitude
$\lambda$	longitude
$\dot{\phi}$	variation de latitude
$\phi$	latitude
$\psi$	orientation du référentiel de la centrale inertielle par rapport au nord dans le sens horaire

## Indices

$e$	direction est
$j$	identification du modèle
$n$	direction nord
$xc$	direction suivant l'axe X du référentiel de la centrale inertielle
$yc$	direction suivant l'axe Y du référentiel de la centrale inertielle

## Abréviations

ENU	référentiel East-North-Up (est-nord-haut)
EQM	Erreur Quadratique Moyenne
GPS	Global Positioning System (système de positionnement mondial)
INS	Inertial Navigation System (système de navigation inertielle)
LLH	référentiel Latitude-Longitude-Height (latitude-longitude-altitude)



Page laissée en blanc à dessein.

## FICHE DE CONTRÔLE DU DOCUMENT

(Indiquer la classification de sécurité du titre, du résumé et des renseignements d'indexation si tout le document est classifié.)

<p>1. DEMANDEUR (Le nom et l'adresse de l'organisation qui a préparé le document. Les organisations pour lesquelles le document a été préparé, p. ex., le Centre qui commande un rapport à un entrepreneur ou l'organisme à l'origine du document doivent figurer à la section 8.)</p> <p><b>R &amp; D pour la défense Canada – Valcartier 2459, boulevard Pie-XI Nord, Québec, Québec, Canada G3J 1X5</b></p>	<p>2. CLASSIFICATION DE SÉCURITÉ (Classification de sécurité globale du document, y compris les notices d'avertissement spéciales, s'il y a lieu.)</p> <p><b>Non classifié (Marchandises non-contrôlées) DMC A RÉVISION : GCEC JUIN 2010</b></p>	
<p>3. TITRE (Titre au long du document qui figure sur la page titre. La classification du titre devrait être indiquée à l'aide de l'abréviation voulue [S, C, ou U], entre parenthèses, après le titre.)</p> <p style="text-align: center;"><b>Comparaison de différents filtres de Kalman et modèles de système pour la navigation</b></p>		
<p>4. AUTEURS (Nom de famille, puis initiales – Ne pas mettre le grade, le titre, etc.)</p> <p style="text-align: center;"><b>Beaudoin, Y.; Gagnon, E.; Desbiens, A.; Landry, R.</b></p>		
<p>5. DATE DE PUBLICATION (Mois et année de publication du document.)</p> <p style="text-align: center;"><b>Avril 2012</b></p>	<p>6a. NOMBRE DE PAGES (Nombre total de pages contenant des renseignements, y compris les annexes, les appendices, etc.)</p> <p style="text-align: center;"><b>42</b></p>	<p>6b. NOMBRE DE RÉFÉRENCES (Nombre total de références citées dans le document.)</p> <p style="text-align: center;"><b>8</b></p>
<p>7. NOTES DESCRIPTIVES (Catégorie du document, p. ex., rapport, note ou mémorandum technique. Indiquer s'il y a lieu s'il s'agit d'un rapport provisoire, p. ex., d'un rapport d'étape, d'un rapport sommaire, d'un rapport annuel ou d'un rapport final. Si le document porte sur une période précise, indiquer les dates correspondantes.)</p> <p style="text-align: center;"><b>Mémorandum technique</b></p>		
<p>8. RESPONSABLE (Nom et adresse du bureau de projet ou du laboratoire du Ministère qui est responsable du travail de recherche et de développement.)</p> <p style="text-align: center;"><b>R &amp; D pour la défense Canada – Valcartier 2459, boulevard Pie-XI Nord, Québec, Québec, Canada G3J 1X5</b></p>		
<p>9a. N° DU PROJET OU DE LA SUBVENTION (Indiquer s'il y a lieu le numéro du projet ou de la subvention de recherche et de développement dans le cadre duquel le document a été rédigé. Préciser s'il s'agit d'un projet ou d'une subvention.)</p> <p style="text-align: center;"><b>15e04</b></p>	<p>9b. N° DU CONTRAT (Indiquer s'il y a lieu le numéro du contrat dans le cadre duquel le document a été rédigé.)</p>	
<p>10a. N° DE DOCUMENT DU DEMANDEUR (Numéro de document officiel par lequel le demandeur désigne le document. Ce numéro doit être propre au document.)</p> <p style="text-align: center;"><b>DRDC Valcartier TM 2011-184</b></p>	<p>10b. AUTRES N° DE DOCUMENT (Autres numéros qui pourraient avoir été attribués au document par le demandeur ou le responsable.)</p>	
<p>11. DISPONIBILITÉ DU DOCUMENT (Limites à la diffusion du document autres que celles qu'impose la classification de sécurité.)</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Diffusion illimitée</p> <p><input type="checkbox"/> Ministères de la Défense et entrepreneurs du secteur de la défense; diffusion plus large sur approbation seulement</p> <p><input type="checkbox"/> Ministères de la Défense et entrepreneurs du secteur de la défense du Canada; diffusion plus large sur approbation seulement</p> <p><input type="checkbox"/> Ministères et organismes publics; diffusion plus large sur approbation seulement</p> <p><input type="checkbox"/> Ministères de la Défense; diffusion plus large sur approbation seulement</p> <p><input type="checkbox"/> Autre (préciser):</p>		
<p>12. ANNONCE DU DOCUMENT (Restrictions imposées à l'annonce du document. Elles correspondent normalement à la disponibilité du document (11). Toutefois, si une diffusion plus large que celle qui a été prévue au par. 11 peut être envisagée, un plus large auditoire d'annonce peut être retenu.)</p> <p style="text-align: center;"><b>illimité</b></p>		

13. RÉSUMÉ (Résumé succinct du document. Le résumé peut paraître ailleurs dans le corps du document. Il est éminemment souhaitable que le résumé d'un document classifié soit sans classification. Chaque paragraphe du résumé doit commencer par une indication de la classification de sécurité des renseignements qu'il contient [sauf si tout le document est sans classification]; utiliser les lettres voulues: S, C, DR ou SC. Il n'est pas nécessaire de mettre ici le résumé dans les deux langues officielles, sauf si le document est bilingue.)

Le travail présenté dans ce rapport s'inscrit dans le projet de recherche appliquée (ARP) 15eo04 et se concentre sur la partie navigation. En navigation, une approche souvent utilisée est de fusionner les données d'une centrale inertielle (INS) et les données d'un récepteur de système de positionnement mondial (GPS) à l'aide d'un filtre de Kalman. Le but de la présente étude est d'analyser la charge de calcul, la précision des estimations et la robustesse à un biais sur une mesure selon le modèle et le filtre de Kalman choisis. Pour ce faire, le déplacement, en deux dimensions, d'un train sur une trajectoire prédéterminée est utilisé. L'utilisation d'un train plutôt qu'un lanceur de satellite a pour but de simplifier l'analyse. Dans un premier temps, l'effet du regroupement des états est étudié. Une période d'échantillonnage courte est utilisée, ce qui permet de négliger l'effet de l'élimination des retards inhérents au regroupement d'états. Ensuite, l'estimation d'états est comparée à l'estimation d'erreur d'états. Finalement, le filtre de Kalman étendu est comparé au filtre de Kalman non parfumé.

14. MOTS-CLÉS, DESCRIPTEURS ou IDENTIFICATEURS (Termes ou courtes phrases techniquement significatifs qui décrivent le document et qui pourraient en faciliter le catalogage. Choisir des termes qui ne nécessitent pas une classification de sécurité. Des identificateurs comme le modèle, la désignation, la marque de commerce, le nom de code d'un projet militaire et l'endroit peuvent aussi être donnés. Si cela est possible, on tirera les termes choisis d'un thésaurus publié comme le Thesaurus of Engineering and Scientific Terms (TEST) et on indiquera le thésaurus utilisé. S'il n'est pas possible d'utiliser des termes d'indexation sans classification, la classification de chacun devrait être indiquée comme celle du titre.)

navigation; filtre de Kalman étendu; filtre de Kalman non parfumé; GPS; INS

## **Defence R&D Canada**

Canada's Leader in Defence  
and National Security  
Science and Technology

## **R & D pour la défense Canada**

Chef de file au Canada en matière  
De science et de technologie pour  
la défense et la sécurité nationale



[www.drdc-rddc.gc.ca](http://www.drdc-rddc.gc.ca)

